

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA
CATARINA
CÂMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO SUPERIOR DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Julia Fontana Giffhorn

**ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO DE VIGA DE EULER-
BERNOULLI E DE TIMOSHENKO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS**

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 2019

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA
CATARINA
CÂMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO SUPERIOR DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Julia Fontana Giffhorn

**ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO DE VIGA DE EULER-
BERNOULLI E DE TIMOSHENKO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil

Professor Orientador: Fernando Toppan Rabello, doutor.

FLORIANÓPOLIS, JULHO DE 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor.

Giffhorn, Julia

Análise Comparativa do Modelo de Viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko através do Método das Diferenças Finitas / Julia Giffhorn ; orientação de Fernando Toppan Rabello. - Florianópolis, SC, 2019.

83 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) - Instituto Federal de Santa Catarina, Câmpus Florianópolis. Bacharelado em Engenharia Civil. Departamento Acadêmico de Construção Civil. Inclui Referências.

1. Viga. 2. Método das Diferenças Finitas. 3. Teoria de Euler-Bernoulli. 4. Teoria de Timoshenko. 5. Algoritmo. I. Toppan Rabello, Fernando. II. Instituto Federal de Santa Catarina. Departamento Acadêmico de Construção Civil. III. Título.

ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO DE VIGA DE EULER-BENOULLI E DE TIMOSHENKO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

JULIA FONTANA GIFFHORN

Este trabalho foi julgado adequado para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil e aprovado na sua forma final pela banca examinadora do Curso Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina.

Florianópolis, 25 de julho de 2019.



Prof. Fernando Toppan Rabello



Prof. André Puel



Prof^a. Márcia Maria Machado Steil

RESUMO

Na Engenharia Civil a viga é um dos elementos estruturais mais estudados, sendo que as duas principais teorias que explicam seus movimentos são: Teoria de Euler-Bernoulli e a Teoria de Timoshenko. A principal diferença entre as teorias é a consideração das deformações por cisalhamento abordada pela teoria de Timoshenko. Sabe-se que, atualmente, o rigor exigido na solução de fenômenos físicos implica necessariamente na agilidade e viabilidade de obtenção de uma solução, com isso as técnicas numéricas são uma boa ferramenta para tal objetivo. Logo, neste trabalho foi aplicado o Método das Diferenças Finitas, o qual é uma solução numérica, nas equações diferenciais resultantes das teorias da viga. Com isso, foi desenvolvido um algoritmo que tenha como resultado a linha elástica da viga, tanto de Timoshenko, como a de Euler Bernoulli. Os resultados gerados pelos algoritmos do MDF foram comparados e validados com soluções analíticas, de forma a medir a convergência dessas soluções. Além disso, foi comparado os valores da deflexão da viga de ambas as teorias, analisando parâmetros como relação de vão e altura, carregamento e módulo de elasticidade da viga. Como resultados, encontrou-se uma maior divergência entre o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko para vigas com baixa razão entre vão e a altura, devido aos efeitos de cisalhamento. Os fatores carregamento e módulo de elasticidade não tornaram a atuação do cisalhamento mais expressiva.

Palavras-chave: Viga. Método das Diferenças Finitas. Teoria de Euler-Bernoulli. Teoria de Timoshenko. Algoritmo.

ABSTRACT

The Beam is one of the most studied structural elements in Civil Engineering, and the main theories that explain their movements are: Theory of Euler-Bernoulli and Theory of Timoshenko. The main difference between these theories is the shear deformation considered by the Theory of Timoshenko. It is known that, now a days, the rigorous requirement of the solution of physical phenomena necessarily implies the agility and viability for obtaining a solution, thereby the numerical techniques are a good tool for reaching this goal. In this study, a numerical method called Finite Difference Method (FDM) was applied to the beam deflection differential equations. Therewith, it was developed an algorithm which the results are the elastic line of the beam, for Timoshenko and for Euler-Bernoulli. The results generated by the FDM algorithm were compared and validated with analytical solution, in order to measure the convergence of these solutions. The values of beam deflections obtained by the both theories were compared, and parameters such as length-height ratio, the load and the elasticity of the beam were analyzed. It was observed that a greater divergence between the model of Euler-Bernoulli and Timoshenko occurred when a low length-height beam ratio was analyzed, due to shear effects. Changing other factors, such as loads and modulus of elasticity, didn't make the shear effect more expressive on the deflection values.

Key words: Beam. Finite Differences Method. Theory of Euler-Bernoulli. Theory of Timoshenko. Algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Apoio simples	15
Figura 2 – Rótula	16
Figura 3 – Engaste	16
Figura 4 – Linha elástica da viga fletida	17
Figura 5 – Convenção de sinal positivo	18
Figura 6 – Deformações angulares numa viga	19
Figura 7 – Efeito de cisalhamento associado a flexão pura	20
Figura 8 – Sequência de uma solução numérica	23
Figura 9 – Método das diferenças finitas	24
Figura 10 – Interface gráfica do Octave	27
Figura 11 – Vigas analisadas	30
Figura 12 – Viga com extremo engastado	32
Figura 13 – Viga com extremo apoiado do 2º gênero.	33
Figura 14 – Viga com extremo livre	34
Figura 15 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído	38
Figura 16 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.	39
Figura 17 – Viga Bi Apoiada discretizada	45
Figura 18 – Viga engaste-livre discretizada	46
Figura 19 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído	46
Figura 20 – Viga Bi apoiada subdividida em 7 nós	47
Figura 21 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.	49
Figura 22 – Viga Engastada-livre subdividida em 7 nós	50
Figura 23 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído	52
Figura 24 – Viga Bi apoiada subdividida em 5 nós	54
Figura 25 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.	57
Figura 26 – Viga Engastada-livre subdividida em 5 nós	58
Figura 27 – Fluxograma dos dados de entrada	60
Figura 28 – Fluxograma dos dados de entrada	61
Figura 29 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga bi apoiada com carregamento distribuído – Modelo Euler Bernoulli.	62

Figura 30 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga bi apoiada com carregamento distribuído – Modelo Timoshenko.....	63
Figura 31 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga engastada-livre com carregamento distribuído – Modelo de Euler-Bernoulli.....	63
Figura 32 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga engastada-livre com carregamento distribuído – Modelo de Timoshenko.....	64
Figura 33 – Gráfico comparativo entre número de nós discretizada a viga e erro médio. Vigas Biapoiadas com carregamento distribuídos.....	65
Figura 34 – Gráfico comparativo entre número de nós no qual a viga foi discretizada e erro médio. Vigas Engastada-livre com carregamento distribuídos.	65
Figura 35 – Análise comparativa entre a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, variando a proporção (L/h). – Viga bi-apoiada	66
Figura 36– Erro médio da deflexão em reação a proporção (L/h). – Viga bi-apoiada	67
Figura 37 – Análise comparativa entre a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, variando a proporção (L/h). – Viga engastada-livre.....	67
Figura 38 – Erro médio da deflexão em reação a proporção (L/h). – Viga engastada-livre.....	68
Figura 39 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o carregamento – Viga bi-apoiada.	69
Figura 40 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o carregamento – Viga engastada-livre.....	69
Figura 41 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o módulo de elasticidade – Viga bi-apoiada.....	70
Figura 42 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o módulo de elasticidade – Viga engastada-livre.....	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Operações utilizadas no Octave.....	27
Tabela 2 – Características e propriedades das vigas analisadas.....	30
Tabela 3 – Tipos de seções analisadas	31
Tabela 4 – Tipos de carregamentos analisados.....	31
Tabela 5 – Módulos de elasticidades analisados	31

LISTA DE SÍMBOLOS

Y	Deflexão no ponto x
v	Deflexão no ponto x
M	Momento fletor
E	Módulo de elasticidade longitudinal
I	Inércia da seção transversal
θ	Giro da seção transversal do elemento
V	Esforço cortante
Q	Carga distribuída
P	Carga pontual
G	Módulo de elasticidade transversal
A	Área da seção transversal
h	Altura da viga
b	Base da viga
L	Comprimento de uma viga
k	Fator de correção ao cisalhamento
γ_0	Rotação associada ao efeito do cisalhamento
φ	Rotação associada a flexão pura

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDOs	Equações diferenciais ordinárias
EDPs	Equações diferenciais parciais
MDF	Método das diferenças finitas
MVF	Método dos Volumes Finitos
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS	14
1.1.1	Objetivo geral	14
1.1.2	Objetivos específicos	14
2	REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1	Vigas	15
2.1.1	Modelo de Euler-Bernoulli	17
2.1.2	Modelo de Timoshenko	18
2.2	Métodos numéricos	22
2.2.1	Método das Diferenças Finitas	23
2.3	Linguagem de programação	26
3	MÉTODOS	29
3.1	Vigas analisadas	29
3.2	Condições de contorno	32
3.2.1	Modelo de Euler-Bernoulli	32
3.2.2	Modelo de Timoshenko	35
3.3	Soluções analíticas	37
3.3.1	Modelo de Euler-Bernoulli	37
3.3.2	Modelo de Timoshenko	41
3.4	Equacionamento numérico	45
3.4.1	Modelo de Euler-Bernoulli	46
3.4.2	Modelo de Timoshenko	52
3.5	Pensamento computacional	60
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	62
4.1	Estudo paramétrico	66
5	CONCLUSÃO	71
6	CONSIDERAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	72
7	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A – ALGORITMO DA DEFLEXÃO DE VIGA DO MODELO DE EULER-BERNOULLI E DE TIMOSHENKO	76

1 INTRODUÇÃO

Na Engenharia Civil, a viga é um dos elementos estruturais mais importantes, sendo necessário o conhecimento de suas propriedades e comportamento. No estudo desse comportamento, depara-se com expressões matemáticas ou equações diferenciais necessárias para a análise e busca das respostas (SOUZA; CRUZ, 2018).

Atualmente, o rigor exigido na solução de fenômenos físicos de interesse à engenharia implica necessariamente na agilidade de obtenção de uma solução com precisão satisfatória. Em contraposição aos procedimentos analíticos de solução, que apresentam grandes restrições matemáticas para soluções simples e gerais, quanto às técnicas experimentais, que envolvem elevado custo e dispêndio de tempo (como no caso de protótipos e modelos em escala reduzida), as técnicas numéricas são efetivamente rápidas e flexíveis (ANDRADE; LOEFFLER, 2015).

Os métodos numéricos são um veículo eficiente para o aprendizado do uso de computadores. É bem sabido que uma forma eficiente de aprender a programar é realmente escrever um programa de computador. Como os métodos numéricos são, na maioria das vezes, projetados para a implementação em computadores, eles se mostram ideais para este propósito (CHAPRA; CANALE, 2011).

A utilização de softwares tem facilitado a vida de diversos profissionais e para o Engenheiro Civil isso não é diferente. No entanto, nos cursos de graduação tem-se dado pouca importância ao estudo dos métodos numéricos, que levam as respostas às questões necessárias ao exercício da profissão. Apesar de não ser o foco do curso, esse conhecimento é cada vez mais necessário e fundamental para o profissional no mundo em que a dependência de softwares é uma realidade.

O Método das Diferenças Finitas, o qual é uma solução numérica, possibilita ao profissional trabalhar com situações complexas, além disso é um dos métodos mais simples em relação a outros, como método dos elementos finitos e o método dos resíduos ponderados (DEUS et al, 2010, p.10)

Para o cálculo da deformação da viga, existem diferentes teorias que explicam tal comportamento, entre elas destacam-se duas: Timoshenko e Euler-Bernoulli. A diferença entre ambas é que a de Euler-Bernoulli leva em consideração

apenas o movimento de translação que ocorre durante a flexão e a de Timoshenko também aborda conceitos de cisalhamento e a inércia rotatória.

Com o intuito de efetuar análise comparativa dos modelos de vigas de Timoshenko e de Euler-Bernoulli e também aprender mais sobre as soluções numéricas e linguagem computacional, neste trabalho foi elaborado um programa, na linguagem computacional do *Octave*, que calcula a deflexão de vigas de ambas as teorias, empregando o Método das diferenças Finitas.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento elástico dos modelos de vigas de Timoshenko e Euler-Bernoulli sob uma visão numérica e analítica.

1.1.2 Objetivos específicos

- a) Rever os principais conceitos do comportamento elástico de vigas;
- b) Aplicar o Método das Diferenças Finitas nas equações governantes das vigas;
- c) Elaborar algoritmos com a linguagem computacional OCTAVE, que tenham como resultado a linha elástica da viga;
- d) Demonstrar a diferença entre a Teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko;
- e) Analisar a convergência do método numérico (Método das diferenças finitas) e do método analítico;
- f) Analisar a convergência entre a teoria de viga de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko e verificar em qual situação seria melhor a aplicação desta última.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Vigas

As vigas são elementos estruturais das edificações, que dão sustentação a laje e transferem os esforços para os pilares. Além de edificações, seu conceito pode ser utilizado em diversas outras aplicações, como por exemplo, hélices de helicópteros, asas de avião, trilhos de trens, pontes etc. Elas podem ser de materiais como madeira, concreto armado e aço, entre outros.

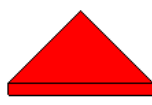
As vigas são normalmente sujeitas a cargas dispostas transversalmente ao eixo, o que resultará em esforços de cisalhamento e flexão. Quando cargas não transversais ao eixo são aplicadas ao elemento, surgirão forças axiais, o que tornará mais complexa a análise estrutural (PINTO, 2000).

O carregamento de uma viga pode ser carregamento distribuído, forças concentradas e momentos, podendo também ser uma combinação destes. Segundo Timoshenko e Gere (1983) as cargas distribuídas são caracterizadas pela taxa de carregamento que é expressa em unidade força por unidade de comprimento ao longo do eixo da viga. Essas cargas podem ser tanto uniformes quanto variáveis.

Conforme Jansen (1985), as restrições aos movimentos de uma estrutura se dão por meio dos apoios ou vínculos. Os apoios ou vínculos são classificados em função do número de graus de liberdade impedidos. Nos apoios, nas direções dos elementos impedidos, surgem as reações de apoio. Os três tipos de apoio são:

- I. Apoio simples (1º gênero): Impedem o deslocamento perpendicular ao plano de apoio, introduzindo uma única força nesta direção, permitindo a rotação (CAMPANARI, 1985). Ou seja, impede a translação no eixo y . (Figura 1)

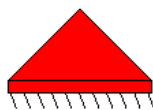
Figura 1 – Apoio simples



Fonte: Autor

- II. Rótula (2º gênero): Impedem o deslocamento em qualquer direção do plano, introduzindo assim uma força numa direção qualquer, mas permite rotação. Ou seja, impede a translação no eixo x e y .

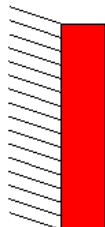
Figura 2 – Rótula



Fonte: Autor

- III. Engaste (3º gênero): Impedem qualquer deslocamento ou rotação no plano, assim ele introduz duas componentes de força e um momento (CAMPANARI, 1985). Ou seja, impede a translação no eixo x e y e impede a rotação em z .

Figura 3 – Engaste



Fonte: Autor

Existe mais de uma teoria que descreve o movimento das vigas, sendo os dois principais a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. Nos tópicos seguintes serão explicadas as considerações de ambas as teorias.

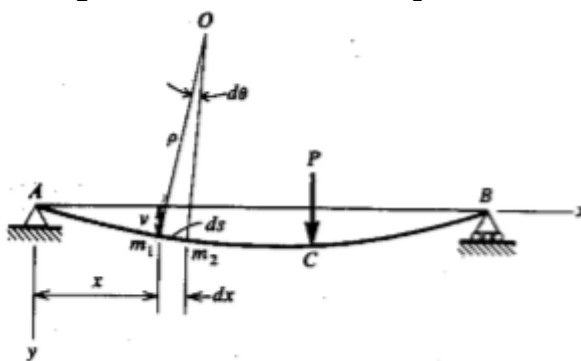
2.1.1 Modelo de Euler-Bernoulli

A teoria mais simples e a mais comumente usada é a de Euler-Bernoulli a qual adota um campo de deslocamento que implica nas hipóteses de que uma linha reta e normal a superfície neutra antes da deformação da peça, permanecerá reta e normal após a deformação desta, implicando ainda no negligenciamento dos efeitos normais e cisalhantes sobre a estrutura (Silva & Silva, 2010).

Conforme Fleishfresser (2012), a teoria de Euler-Bernoulli analisa apenas as deformações de uma viga submetida a um carregamento qualquer considerando apenas o efeito do momento fletor resultante dessas cargas.

Primeiramente é considerado uma viga simplesmente apoiada AB, representada pela Figura 4. Antes da aplicação da carga P , o eixo longitudinal da viga é reto. Depois da flexão, o eixo torna-se curvo, como se vê na figura: linha ACB. Supondo que xy seja um plano de simetria a que todas as cargas estejam nesse plano, a curva ACB, denominada linha elástica, situa-se nele também (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

Figura 4 – Linha elástica da viga fletida



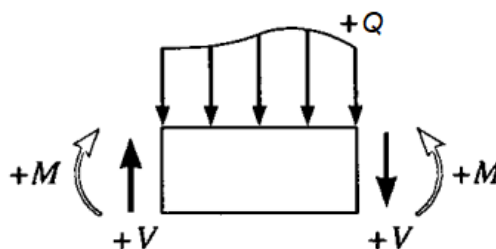
Fonte: Timoshenko e Gere (1983)

Segundo Hibbeler (2006) a equação da linha elástica, considerando apenas deflexões devido a flexão, pode ser expressa por:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

sendo que Y representa a deflexão no ponto x , M representa o momento fletor, E o módulo de elasticidade do material que compõe a viga e I a inércia da seção transversal. Os sentidos dos sinais positivos considerados estão representados na Figura 5:

Figura 5 – Convenção de sinal positivo



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2010)

Além disso, conforme Timoshenko e Gere (1983), as seguintes equações também são utilizadas, para calcular-se a rotação (θ), o esforço cortante (V) e a carga distribuída (Q), considerando que $V = \frac{dM}{dx}$ e $Q = \frac{dV}{dx}$:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\theta}{EI} \quad (2)$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = -\frac{V}{EI} \quad (3)$$

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{Q}{EI} \quad (4)$$

2.1.2 Modelo de Timoshenko

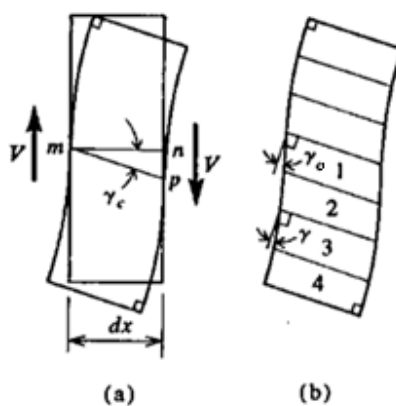
Timoshenko propôs uma teoria de vigas a qual adiciona os efeitos da distorção de cisalhamento e inércia rotatória ao modelo de Euler-Bernoulli (Costa, 2006).

Conforme citado por Fleischfresser (2012), ocorre que, durante a flexão, as seções de uma viga executam não somente o movimento de translação, mas também

giram; assim, a rotação do eixo de uma viga depende não só da rotação associada à flexão pura da seção transversal, mas também do ângulo formado com o eixo horizontal, devido ao cisalhamento. Souza e Mendonça (2008) afirmam que tal hipótese é verificado em viga sob a ação de carregamentos quaisquer, principalmente com moderada relação entre o comprimento da viga e a altura de sua seção transversal.

Timoshenko e Gere (1983) explicam que como as tensões de cisalhamento variam ao longo da altura da viga, as seções transversais tornam-se superfícies curvas. A Figura 6a, representa uma viga de seção transversal retangular, com comprimento dx , sofrendo apenas as deformações devidas ao cisalhamento, sem as deformações decorrentes da flexão e à ação do momento fletor que atua no elemento. A linha mn representa o eixo original da viga e mp mostra a posição do eixo após a deformação angular.

Figura 6 – Deformações angulares numa viga



Fonte: Timoshenko e Gere (1983)

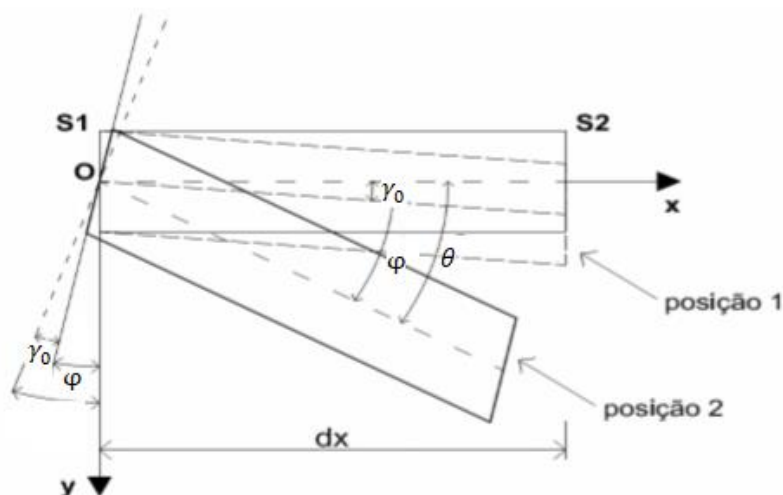
Timoshenko e Gere (1983) ainda explicam que, admitindo-se os lados do elemento, nos pontos m e n , permaneçam na vertical, as arestas superior e inferior ficarão paralelas à linha mp , que faz um ângulo γ_0 , com a horizontal. Dividindo a seção em faixas (Figura 6b), cada uma sofrendo cisalhamento puro, consegue-se observar melhor a deformação do elemento. A deformação na faixa 1 é γ_0 , enquanto na faixa 2 e 3 será menor e na faixa 4 a deformação deve ser nula, formando ângulos reto.

A rotação associada a efeito do cisalhamento é representada por γ_0 , e a rotação associada a flexão pura é representada por φ . Então, a rotação total do eixo da viga resulta na soma de ambas as contribuições, ou seja:

$$\theta = \frac{dY}{dx} = \varphi + \gamma_0 \quad (5)$$

A Figura 7 representa um trecho da viga compreendido entre duas seções transversais S1 e S2 situadas a uma distância dx . A viga, após sofrer deformação devido ao cisalhamento, atinge a posição 1. E submetida a rotação adicional, associada a flexão pura, atinge a posição 2.

Figura 7 – Efeito de cisalhamento associado a flexão pura



Fonte: Adaptado de Fleishfresser (2012)

Conforme Fleischfresser (2012), a teoria de vigas de Timoshenko compartilha das seguintes hipóteses:

1. O carregamento é suposto atuante sobre o plano xy de simetria da viga, de maneira a permitir que seu eixo flexionado permaneça nesse plano.
2. As mudanças de configuração do sistema estrutural são suficientemente pequenas, a fim de permitir a utilização de relações deformação-deslocamento lineares.
3. O material da viga é homogêneo, isótropo e linearmente elástico.

4. As tensões normais no eixo y são muito pequenas em relação à tensão normal no eixo x e, portanto, são ignoradas nas relações tensão-deformação.
5. As seções planas normais para o eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação.

Considerando os mesmos sinais positivos da Figura 5, segundo Antes (2002), o momento fletor (M) e a força de cisalhamento (V), podem ser calculados pelas seguintes equações:

$$M = EI \frac{d\varphi}{dx} \quad (6)$$

$$V = kGA \left(\frac{dY}{dx} - \varphi \right) \quad (7)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, A é a área da seção e k é o fator de correção ao cisalhamento que depende da forma geométrica da seção, cujo valor para seções retangulares é de $5/6$ (Cowper, 1966).

De acordo com Fleischfresser (2012), as equações de equilíbrio de forças e momentos de uma viga submetida a uma carga distribuída $Q(x)$ será:

$$\frac{dV}{dx} = -Q \quad (8)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = -EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (9)$$

Assim substituindo as equações **(8)** e **(9)** nas equações **(6)** e **(7)**, chega-se nas equações:

$$kGA \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2Y}{dx^2} \right) = Q \quad (10)$$

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} = kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) \quad (11)$$

Derivando a equação (11) em relação a variável independente x e substituindo na equação (14), a expressão resultante apenas de $\varphi(x)$:

$$EI \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = Q \quad (12)$$

A partir da equação (11) ainda pode-se escrever:

$$EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) = 0 \quad (13)$$

Ainda segundo Fleischfresser (2012), as equações (12) e (13) constituem as chamadas equações governantes do problema estático para o caso de aplicação de uma carga uniformemente distribuída. Quando existe uma carga concentrada P aplicada em um ponto situado a uma distância X da extremidade esquerda da viga, são consideradas as equações diferenciais (7) e (9).

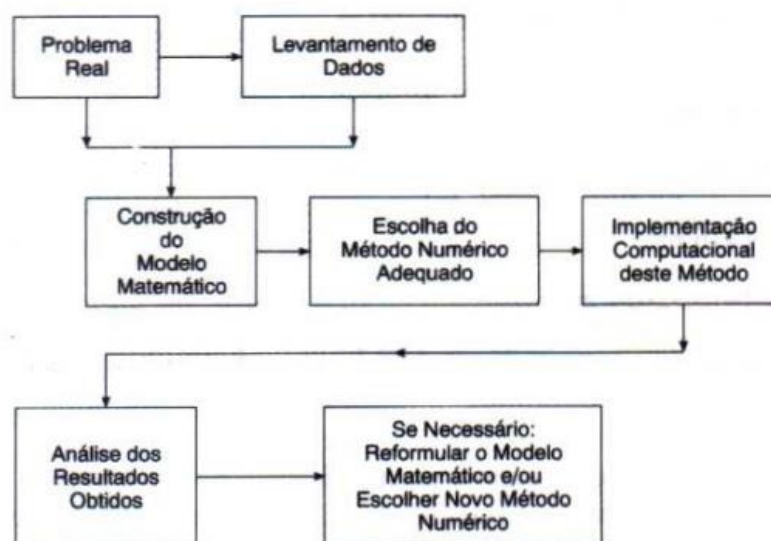
2.2 Métodos numéricos

Equações diferenciais ordinárias (EDOs) e parciais (EDPs) aparecem em inúmeros problemas da física-matemática. Em especial, na área da engenharia, todo cálculo um pouco mais elaborado normalmente recai em uma equação diferencial. Poucas equações diferenciais têm solução analítica possível ou viável, assim os métodos numéricos são uma ferramenta de extrema eficiência para a solução. (FRANCO, 2011, pg 2)

Os métodos numéricos são técnicos pelas quais os problemas matemáticos são formulados de modo que possam ser resolvidos com operações aritméticas. Embora existam muitos tipos de métodos numéricos, eles têm uma característica em comum: invariavelmente envolvem grande número de cálculos aritméticos (CHAPRA; CANALE, 2011)

A resolução de métodos numéricos envolve várias fases que podem ser estruturadas conforme a Figura 8.

Figura 8 – Sequência de uma solução numérica



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996)

Segundo Ruggiero e Lopes (1986), não é raro de acontecer que os resultados finais estejam distantes do que se esperaria obter, ainda que todas as fases de resolução tenham sido realizadas corretamente. Os resultados obtidos também dependem da precisão dos dados de entrada, da forma como estes dados são representados no computador e das operações numéricas efetuadas.

Os métodos numéricos praticamente não apresentam restrições e oferecem atrativas vantagens como: baixo custo, alta velocidade, informações completas e facilidade em simular condições realísticas (FRANCO, 2011).

Dentre os métodos numéricos disponíveis, existem: Método das diferenças finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), dentre outros.

Neste trabalho será utilizado o Método das Diferenças finitas, o qual será explicado no tópico a seguir.

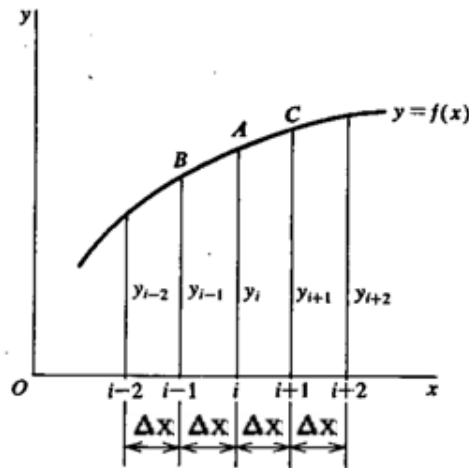
2.2.1 Método das Diferenças Finitas

De acordo com Timoshenko e Gere (1983), o método das diferenças finitas é numérico e pode ser usado na determinação de deformação de vigas. A base do método é substituir a equação diferencial elástica pelas aproximações em diferenças

finitas e, em seguida, resolver algebricamente as equações obtidas em diversos pontos, ao longo do comprimento da viga. As soluções das equações são valores aproximados das deflexões nos diferentes pontos.

Timoshenko e Gere (1983) explicam o método através da Figura 9. Ou seja, o método consiste em considerar uma função geral $f(x)$, subdividir em n subintervalos espaçados igualmente com uma distância Δx , com os pontos numerados da esquerda para a direita. As ordenadas da curva nesses pontos são caracterizadas por índices correspondentes aos números dos pontos. Por exemplo, nos pontos $i-2, i-1, i, i+1, \text{ etc.}$, as ordenadas são $y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \text{ etc.}$, respectivamente.

Figura 9 – Método das diferenças finitas



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Gere (1983)

Uma derivada parcial pode ser sincretizada através do truncamento da série de Taylor. A série de Taylor para $P(x+\Delta x)$ é dada por (Araujo, 2009):

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \frac{dP(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2P(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3P(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \frac{d^{(n-1)}f(\Delta x)^{n-1}}{dx^{(n-1)}(n-1)!} \quad (14)$$

Usando a mesma série para $P(x-\Delta x)$ tem-se:

$$P(x - \Delta x) = P(x) - \frac{dP(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2P(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3P(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \frac{d^{(n-1)}f(\Delta x)^{n-1}}{dx^{(n-1)}(n-1)!} \quad (15)$$

Subtraindo a equação (14) da equação (15), e desprezando os termos de ordens superiores a um tem-se:

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{P(x + \Delta x) - P(x - \Delta x)}{2(\Delta x)} \quad (16)$$

A equação **(16)** é conhecida como diferencial central, há também a diferencial para frente e a diferencial para trás (SILVA & PEDROSO, 2005). Sabe-se que a diferencial central tem melhor acurácia para solução exata (SILVA S. , 2008), por isso não serão mostradas as demais diferenciais.

Para obter-se a derivada segunda, deve-se somar a equação **(14)** e a equação **(15)** e desprezar os termos de ordens superiores a dois, logo tem-se:

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} = \frac{P(x + \Delta x) - 2P(x) + P(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

A terceira derivada pode ser obtida através da equação **(16)**, chamando $P(x)$ de $\frac{d^2P(x)}{dx^2}$, resultando em:

$$\frac{d^3P(x)}{dx^3} = \frac{P(x + 2\Delta x) - 2P(x + \Delta x) + 2P(x - \Delta x) - P(x - 2\Delta x)}{2(\Delta x)^3} \quad (18)$$

A quarta derivada pode ser obtida através da equação **(17)**, chamando $P(x)$ de $\frac{d^2P(x)}{dx^2}$, obtendo:

$$\frac{\partial^4P(x)}{\partial x^4} = \frac{P(x + 2\Delta x) - 4P(x + \Delta x) + 6P(x) - 4P(x - \Delta x) + P(x - 2\Delta x)}{(\Delta x)^4} \quad (19)$$

Fazendo com que $Y=f(x)$ e usando a notação inicial tem-se as equações **(16)**, **(17)**, **(18)** e **(19)** tem-se respectivamente:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)} \quad (20)$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (21)$$

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = \frac{Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}}{2(\Delta x)^3} \quad (22)$$

$$\left(\frac{d^4 Y}{dx^4}\right)_i = \frac{Y_{i+2} - 4Y_{i+1} + 6Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2}}{(\Delta x)^4} \quad (23)$$

Ou fazendo com que $\varphi = f(x)$, tem-se:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)} \quad (24)$$

$$\left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (25)$$

$$\left(\frac{d^3 \varphi}{dx^3}\right)_i = \frac{\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}}{2(\Delta x)^3} \quad (26)$$

$$\left(\frac{d^4 \varphi}{dx^4}\right)_i = \frac{\varphi_{i+2} - 4\varphi_{i+1} + 6\varphi_i - 4\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}}{(\Delta x)^4} \quad (27)$$

2.3 Linguagem de programação

Existem diversos tipos de linguagens de programação, entre elas: Java, C, C++, Python, JavaScript, Matlab/Octave, etc.

Matlab e Octave são programas com grande similaridade com relação à linguagem que utilizam. De acordo com Almeida Neto e Nascimento (2011), o primeiro desses programas é um software desenvolvido pela MathWorks, largamente utilizados em processamento numérico intensivo, enquanto o Octave é um software livre, usado para a mesma finalidade.

Segundo Teixeira (2010) o Octave surgiu por volta de 1988, com o propósito de ser um software de apoio a um livro de graduação em projetos de reator químico, escrito por James B. Rawlings da Universidade de Wisconsin-Madison e John G. Ekerdt da Universidade do Texas.

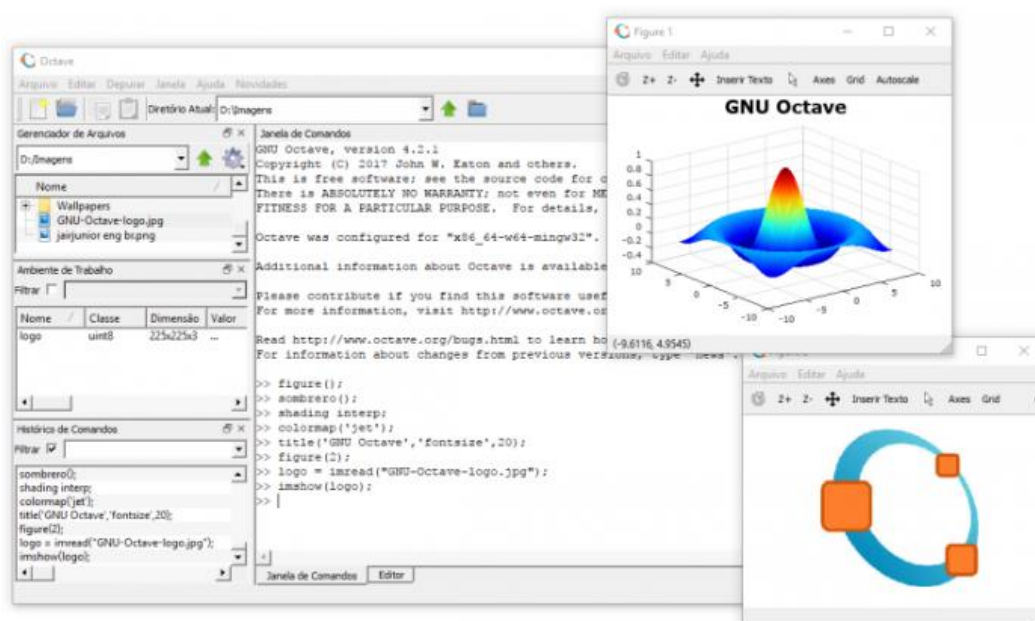
Atualmente, o Octave é muito mais do que apenas um pacote para um curso com utilidades que vão além da sala de aula. Embora o objetivo inicial fosse um pouco vago, sabiam que queriam criar algo que permitisse aos alunos resolver problemas reais, e pudessem usá-lo para diversos outros propósitos além de projetos

relacionados a reator químico. Hoje, milhares de pessoas no mundo usam Octave no ensino, na pesquisa e em aplicações comerciais. (TEIXEIRA, 2010)

O Octave é um programa de linguagem aberta, ou seja, muitas pessoas contribuem com sentenças de comando que são adicionados às versões em fase de teste (TEIXEIRA, 2005).

Conforme Teixeira (2010) o programa Octave possui inúmeras quantidade de ferramenta para a resolução de problemas de álgebra linear, encontra as raízes de equações não lineares, integra funções ordinárias e equações diferenciais algébricas.

Figura 10 – Interface gráfica do Octave



Fonte: Junior (2017)

Algumas das operações/comandos que existem no Octave e que serão utilizadas para a elaboração do algoritmo, estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Operações utilizadas no Octave

Comando	Descrição
+	Adição
-	Subtração
*	Multiplicação

Comando	Descrição
/ ou \	Divisão
^	Potencialização
>	Maior
<	Menor
>=	Maior ou igual
<=	Menor ou igual
==	Testa se as variáveis tem conteúdos iguais
~=	Testa se as variáveis são diferentes
&&	Operação E lógica
 	Operação OU lógica
input	Permite requisitar fornecimento de dados pelo teclado
abs(x)	Valor absoluto ou módulo de um número complexo
If	Condiciona
Else	Usado com o comando if
For	Repete comandos por um número de vezes especificados
While	Repete comandos enquanto condição especificada for verdadeira
zeros(m,n)	Matriz nula
plot	Plotar linear
xlabel	Permite que o eixo das abscissas do gráfico seja identificado
ylabel	Permite que o eixo das ordenadas do gráfico seja identificado
Title	Inclui um título ao gráfico
Hold on	Plotar duas funções no mesmo gráfico

Fonte: Autor.

Para formar matrizes, os elementos de cada linha são separados por espaços em branco ou vírgulas e as colunas separadas por ponto e vírgula, colocando-se colchetes em volta do grupo de elementos que formam a matriz com o objetivo de limitá-la

3 MÉTODOS

Nesta etapa do trabalho será demonstrado a aplicação do Método das Diferenças Finitas nas equações governantes da viga, tanto no modelo de Timoshenko como no de Euler-Bernoulli.

Para fins de comparação, serão desenvolvidas também soluções analíticas para que se possa analisar a convergência deste método com a solução numérica.

As características das vigas analisadas serão apresentados no item 3.1. As variações dos parâmetros definidos neste item servirão para verificar a convergência em tais situações do modelo de viga Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Assim, será possível definir a relação dos parâmetros no qual seria mais seguro a aplicação da teoria de Timoshenko, o qual representa o movimento real da viga.

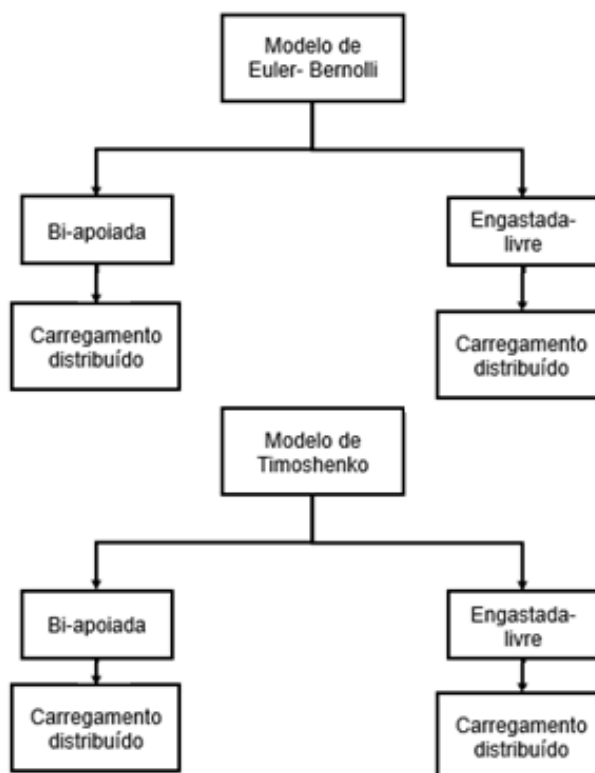
No item 3.2 serão apresentados as condições de contorno e como elas são desenvolvidas para a aplicação no método das diferenças finitas. As soluções analíticas e numéricas serão apresentados nos itens 3.3 e 3.4 respectivamente.

No último tópico deste capítulo será apresentado como foi elaborado o algoritmo, o qual será desenvolvido com a linguagem computacional *OCTAVE*, e que terá como resultado final a linha elástica da viga.

3.1 Vigas analisadas

Como já mencionado previamente, serão analisadas tanto vigas para o modelo de Euler-Bernoulli como a do modelo de Timoshenko. Foram analisadas com vigas do tipo bi-apoiada e viga esgastada-livre com carregamento distribuído para ambas as teorias.

Figura 11 – Vigas analisadas



Fonte: Autor

As vigas serão sempre retangulares, com uma base b e um altura h . Para avaliar a convergência entre o método numérico e as soluções analíticas, supõem-se fixo as propriedades e as características da viga, conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Características e propriedades das vigas analisadas.

Viga	E (kN/m ²)	Q (Kn/m ²)	L (m)	k	G (kN/ m ²)	h (cm)	b (cm)
1	205.000.000	1.000	3,0	0,833	78.864.153	50	50

Fonte: Autor

Em seguida, para cada tipo de viga será analisado seções transversais diferentes, de modo a medir a diferença entre o método de Euler Bernoulli e de Timoshenko. Iniciará com uma viga mais esbelta até uma viga mais robusta. Com relação a Tabela 2, será variado apenas a altura da viga (h), o restante das características será mantida, com o objetivo de poder comparar a relação L/h

Tabela 3 – Tipos de seções analisadas

Viga	b (cm)	h (cm)	Área (m ²)	Inércia (m ⁴)
1	20	30	0,06	0,00045
2	20	60	0,12	0,00360
3	20	90	0,18	0,01215
4	20	120	0,24	0,0288

Fonte: Autor

A fim de verificar se existe outro parâmetro que torne a hipótese de Timoshenko mais expressiva que a teoria de Euler-Bernoulli, também será variado o carregamento distribuído (Tabela 4), sendo mantido as demais propriedades e características constantes. Por fim, é variado o módulo de elasticidade e consequentemente o módulo de elasticidades transversais (Tabela 5), também mantendo as demais características e propriedades constantes, conforme Tabela 2.

Tabela 4 – Tipos de carregamentos analisados

Viga	Q (kN/m ²)
1	30
2	40
3	50

Fonte: Autor

Tabela 5 – Módulos de elasticidades analisados

Viga	E (kN/m ²)	G (kN/ m ²)
1	205.000.000	78.846.153
2	100.000.000	38.461.538
3	50.000.000	19.230.769

Fonte: Autor

3.2 Condições de contorno

As condições de contorno no método das diferenças finitas têm a função de diminuir o número de variáveis no sistema de equações, através de valores conhecidos naquele ponto da viga, e/ou relacionar pontos fora da viga (nós artificiais da malha de diferenças finitas) a pontos no seu interior, levando sempre a um sistema possível determinado para problemas estáticos (Silva & Soares, 2011).

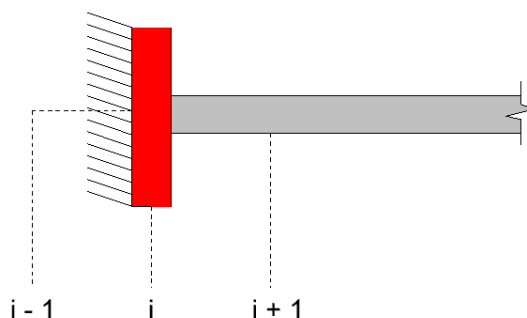
A seguir serão apresentadas as condições de contorno para o modelo de Euler-Bernoulli e Timoshenko para cada condição de apoio.

3.2.1 Modelo de Euler-Bernoulli

- **Condições no Engaste**

A imagem a seguir representa a viga com o extremo engastado e os pontos que representam Y_i , Y_{i-1} e o ponto Y_{i+1} .

Figura 12 – Viga com extremo engastado



Fonte: Autor.

No engaste a flecha é igual a zero, logo tem-se que:

$$Y_i = 0$$

(28)

Além disso, no engaste a rotação também é igual a zero. Inicialmente tem-se as igualdades a seguir:

$$\theta = \frac{dY}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

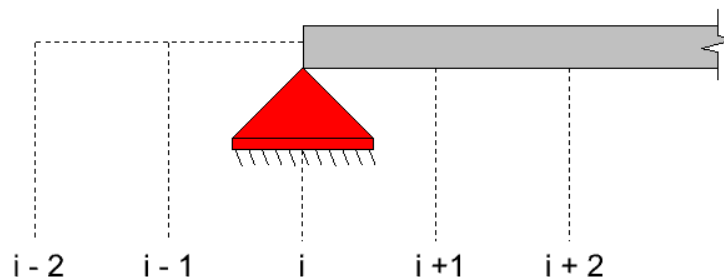
Igualando ambas as equações, conclui-se que:

$$\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)} = 0 \rightarrow \boxed{Y_{i+1} = Y_{i-1}} \quad (29)$$

- **Condições no Extremo Apoiado**

A imagem a seguir representa a viga com o extremo apoiado e os pontos que representam Y_i , Y_{i-1} , Y_{i+1} , Y_{i-2} e o ponto Y_{i+2} .

Figura 13 – Viga com extremo apoiado do 2º gênero.



Fonte: Autor.

O extremo apoiado, podendo ser um apoio do primeiro ou segundo gênero, possui tanto a flecha igual a zero e o momento na posição do apoio também igual a zero.

A flecha igual a zero, resulta em:

$$v = 0 \rightarrow \boxed{Y_i = 0} \quad (30)$$

E visto que o momento na posição do apoio é igual a zero, tem-se inicialmente as duas igualdades a seguir:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Igualando ambas e sabendo, obtém-se:

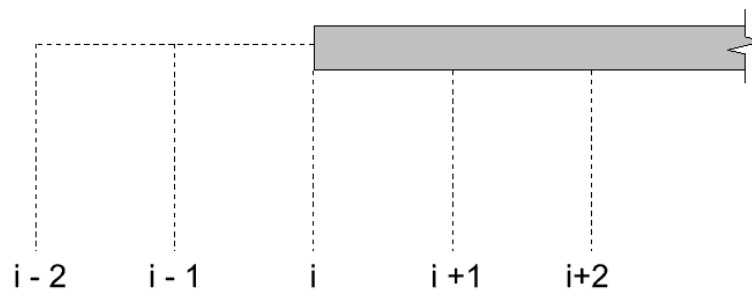
$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} = 0$$

$$\boxed{Y_{i+1} = -Y_{i-1}} \quad (31)$$

- **Condições no Extremo Livre**

A imagem a seguir representa a viga com o extremo livre e os pontos que representam Y_i , Y_{i-1} , Y_{i+1} , Y_{i-2} e o ponto Y_{i+2} .

Figura 14 – Viga com extremo livre



Fonte: Autor.

Na extremidade livre, o momento é igual a zero, assim como no simplesmente apoiado, logo:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2Y}{dx^2} = 0$$

O termo do MDF a ser substituído na equação acima é:

$$\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Logo, resulta a expressão:

$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} = 0$$

$$\boxed{Y_{i+1} = 2Y_i - Y_{i-1}} \quad (32)$$

Além disso, o cortante no extremo livre é igual a zero. Então, iguala-se a equação (3) a zero:

$$\frac{-V}{EI} = \frac{d^3Y}{dx^3} = 0$$

A aproximação do MDF a ser substituído na equação acima é:

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = \frac{Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}}{2(\Delta x)^3} = 0$$

$$\boxed{Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2} = 0} \quad (33)$$

3.2.2 Modelo de Timoshenko

- **Condições no Engaste**

No engaste (Figura 12) tanto o deslocamento quanto a rotação são zeros.

Assim, tem-se:

$$v = 0 \rightarrow \boxed{Y_i = 0} \quad (34)$$

$$\varphi = 0 \rightarrow \boxed{\varphi_i = 0} \quad (35)$$

- **Condições no Extremo Apoiado**

O extremo apoiado (Figura 13), tanto do primeiro e segundo gênero, possui momento e deslocamento igual a zero. O momento é representado pela equação (6), conforme abaixo:

$$M = EI \frac{d\varphi}{dx}$$

Substituindo a derivada parcial pela aproximação do MDF, tem-se:

$$\frac{M}{EI} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)} \quad (36)$$

Então considerando que o momento é nulo, obtém-se:

$$0 = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

$$\boxed{\varphi_{i+1} = \varphi_{i-1}} \quad (37)$$

E visto que o deslocamento é igual a zero, tem-se a mesma equação de contorno que no engaste, que é:

$$v = 0 \rightarrow \boxed{Y_i = 0} \quad (38)$$

• Condições no Extremo Livre

Na extremidade livre (Figura 14), tanto o momento e o esforço cortante são nulos. As equações que demonstram essas propriedades são as equações **(6)** e **(7)**, representadas abaixo:

$$M = EI \frac{d\varphi}{dx}$$

$$V = kGA \left(\frac{dY}{dx} - \varphi \right)$$

Substituindo a derivada parcial da equação **(6)** pela aproximação da diferença finita, tem-se:

$$\frac{M}{EI} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)} \quad (39)$$

Então considerando que o momento é nulo, obtém-se:

$$0 = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

$$\boxed{\varphi_{i+1} = \varphi_{i-1}} \quad (40)$$

E substituindo a derivada parciais da equação (7) pela aproximação das diferenças finitas, tem-se:

$$V = kGA \left(\frac{dY}{dx} - \varphi \right) \quad (41)$$

Lembrando que o cortante no extremo apoiado é igual a zero, logo:

$$0 = kGA \left(\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)} - \varphi \right)$$

$$\boxed{Y_{i+1} - Y_{i-1} = 2(\Delta x)\varphi_i} \quad (42)$$

3.3 Soluções analíticas

As vigas analisadas, tanto do modelo Euler-Bernoulli e do modelo de Timoshenko, serão calculadas a seguir pelo método analítico.

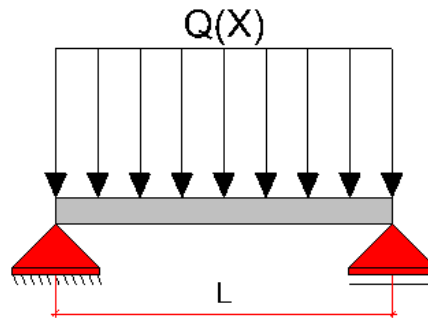
Para a obtenção da linha elástica serão utilizadas as equações já mencionadas nos tópicos 2.1.1 e 2.1.2 e será feito a integração sucessivas dessas equações diferenciais. Após a integração, haverá as 'constantes de integração', que serão obtidas através das condições de contorno.

3.3.1 Modelo de Euler-Bernoulli

Viga Simplesmente Apoiada Com Carregamento Distribuído:

A viga de estudo é uma viga de comprimento L , bi-apoiada, com carga uniformemente distribuída $Q(x)$, e supõem-se um módulo de elasticidade E e momento de inércia I .

Figura 15 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído



Fonte: Autor.

A equação diferencial abaixo rege o comportamento o deslocamento desta viga.

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{Q}{EI}$$

Integrando sucessivamente esta equação, tem-se:

$$\frac{d^3 Y}{dx^3} = \frac{(Qx + c_1)}{EI} \quad (43)$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^2}{2} + c_1 x + c_2 \right) \quad (44)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \quad (45)$$

$$Y = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right) \quad (46)$$

O deslocamento e o momento são nulos em apoios do primeiro e segundo gênero, ou seja:

$$\begin{aligned}
 \text{I. Para } x=0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento igual a zero} - \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \\ \text{Deslocamento igual a zero} - Y = 0 \end{array} \right. \\
 \text{II. Para } x=L & \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento é igual a zero} - \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0 \\ \text{Deslocamento igual a zero} - Y = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Assim, introduzindo essas condições nas equações integradas, resulta em coeficientes iguais a:

$$c_1 = -\frac{QL}{2} \quad (47)$$

$$c_2 = 0 \quad (48)$$

$$c_3 = \frac{QL^3}{24} \quad (49)$$

$$c_4 = 0 \quad (50)$$

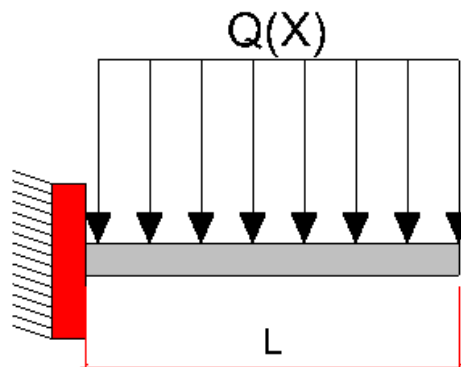
Logo, a equação que expressa o deslocamento ao longo da viga bi-apoiada com carregamento distribuído é:

$$Y = \frac{Q(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)}{24EI} \quad (51)$$

Viga Engastada em um Extremo e Livre no Outro Com Carregamento Distribuído:

A viga de estudo é uma viga de comprimento L , na qual na sua extremidade esquerda ($x=0$) possui um engaste e na extremidade direita ($x=L$) possui extremo livre. Além disso a viga possui módulo de elasticidade E e momento de inércia I . O carregamento é um carregamento distribuído $Q(x)$ por toda a extensão da viga.

Figura 16 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.



Fonte: Autor.

A equação governante que rege o comportamento da viga é:

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{Q}{EI}$$

Integrando sucessivamente esta equação, tem-se:

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = \frac{(Qx + c_1)}{EI} \quad (52)$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^2}{2} + c_1x + c_2 \right) \quad (53)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 \right) \quad (54)$$

$$Y = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4 \right) \quad (55)$$

As condições de contorno da viga são:

$$\text{III. Para } x=0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotação igual a zero} - \frac{dY}{dx} = 0 \\ \text{Deslocamento igual a zero} - Y = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{IV. Para } x=L \left\{ \begin{array}{l} \text{Momento é igual a zero} - \frac{d^2Y}{dx^2} = 0 \\ \text{Cortante é igual a zero} - \frac{d^3Y}{dx^3} = 0 \end{array} \right.$$

Logo, aplicando as duas primeiras condições de contorno, chega-se em valores de coeficientes iguais a:

$$c_4 = 0 \quad (56)$$

$$c_3 = 0 \quad (57)$$

Aplicando as duas últimas condições de contorno, encontra o valor dos demais coeficientes:

$$c_1 = -QL \quad (58)$$

$$c_2 = \frac{QL^2}{2} \quad (59)$$

Resultando na equação:

$$Y = \frac{Q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) \quad (60)$$

3.3.2 Modelo de Timoshenko

Viga Simplesmente Apoiada Com Carregamento Distribuído:

Foi adotado uma viga do modelo Timoshenko com carregamento uniformemente distribuído $Q(x)$, comprimento L e simplesmente apoiada em ambos os extremos. Supõem-se um módulo de elasticidade E , momento de inércia I , módulo de elasticidade transversal G , área da seção A um fator de correção ao cisalhamento que depende da forma geométrica da seção igual a k .

As equações diferenciais abaixo regem o comportamento da viga:

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = \frac{Q}{EI} \quad (61)$$

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} - kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) = 0 \quad (62)$$

Integrando sucessivamente a primeira equação, resulta em:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{Qx + c_1}{EI} \quad (63)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^2}{2} + c_1x + c_2 \right) \quad (64)$$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 \right) \quad (65)$$

O momento é nulo nos apoios, ou seja, tanto no ponto de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{L}$, logo:

$$M(x) = EI \frac{d\varphi}{dx} = \frac{Qx^2}{2} + c_1x + c_2 \quad (66)$$

$$M(0) = \frac{Q0^2}{2} + c_10 + c_2 \quad (67)$$

$$c_2 = 0 \quad (68)$$

$$M(L) = Q \frac{L^2}{2} + c_1L + 0 \quad (69)$$

$$c_1 = -\frac{qL}{2} \quad (70)$$

Resultando na equação da rotação da seção igual a:

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{4} + c_3 \right) \quad (71)$$

A equação **(62)** pode ser expressa também por:

$$\frac{dY}{dx} = \varphi - \left(\frac{EI}{kGA} \right) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (72)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{4} + c_3 \right) - \left(\frac{EI}{kGA} \right) \left(\frac{Qx + \left(-\frac{QL}{2} \right)}{EI} \right) \quad (73)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{4} + c_3 \right) - \left(\frac{1}{kGA} \right) \left(Qx - \frac{QL}{2} \right) \quad (74)$$

Integrando a equação acima, têm-se que:

$$Y = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^4}{24} - \frac{QLx^3}{12} + c_3x \right) - \left(\frac{1}{kGA} \right) \left(\frac{Qx^2}{2} - \frac{QLx}{2} \right) + c_4 \quad (75)$$

Sabendo que o deslocamento é nulo nos apoios, resulta em coeficientes iguais a:

$$c_3 = \frac{QL^3}{24} \quad (76)$$

$$c_4 = 0 \quad (77)$$

Logo, a expressão que expressa o deslocamento da viga é:

$$Y = \frac{Q}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) + \left(\frac{Q}{2kGA}\right)(-x^2 + Lx) \quad (78)$$

A primeira parcela representa a contribuição do momento fletor. A segunda parcela de ambas as equações representa a consideração “extra” de Timoshenko, ou seja, representa a parte do cortante na qual desloca o eixo da viga.

Viga Engastada em um Extremo e Livre no Outro Com Carregamento Distribuído:

Tem-se uma viga do modelo Timoshenko com carregamento uniformemente distribuído $Q(x)$, comprimento L , engastada no extremo esquerdo ($x=0$) e com o outro extremo ($x=L$) livre. Supõem-se um módulo de elasticidade E , momento de inércia I , módulo de elasticidade transversal G , área da seção A um fator de correção ao cisalhamento que depende da forma geométrica da seção igual a k .

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = \frac{Q}{EI} \quad (79)$$

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} - kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) = 0 \quad (80)$$

Integrando sucessivamente a primeira equação, resulta em:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{Qx + c_1}{EI} \quad (81)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^2}{2} + c_1x + c_2 \right) \quad (82)$$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 \right) \quad (83)$$

As condições de contorno são:

- I. Para $x = 0$ a rotação da seção é igual a zero: $\varphi = 0$

II. Para $x = L$ o cortante é igual a zero: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$

Com isso, resulta em:

$$c_3 = 0 \quad (84)$$

$$c_1 = -QL \quad (85)$$

Então:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{Qx - QL}{EI} \quad (86)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^2}{2} - QLx + c_2 \right) \quad (87)$$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{2} + c_2x \right) \quad (88)$$

Substituindo a equação **(86)** e **(88)** na equação **(80)**, se tem:

$$EI \left(\frac{Qx - QL}{EI} \right) - kGA \left(\frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{2} + c_2x \right) - \frac{dY}{dx} \right) = 0 \quad (89)$$

Ou seja:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^3}{6} - \frac{QLx^2}{2} + c_2x \right) - \frac{(Qx - QL)}{kGA} \quad (90)$$

Integrando a equação acima, obtém-se:

$$Y = \frac{1}{EI} \left(\frac{Qx^4}{24} - \frac{QLx^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} \right) - \frac{1}{kGA} \left(\frac{Qx^2}{2} - QLx \right) + c_4 \quad (91)$$

Além das condições de contorno mencionada previamente, se tem:

III. Para $x = 0$ o deslocamento é igual a zero: $Y = 0$

IV. Para $x = L$ o momento é igual a zero: $\frac{d\varphi}{dx} = 0$

Logo:

$$c_4 = 0 \quad (92)$$

$$c_2 = \frac{QL^2}{2} \quad (93)$$

Então, a equação governante da linha elástica da viga é:

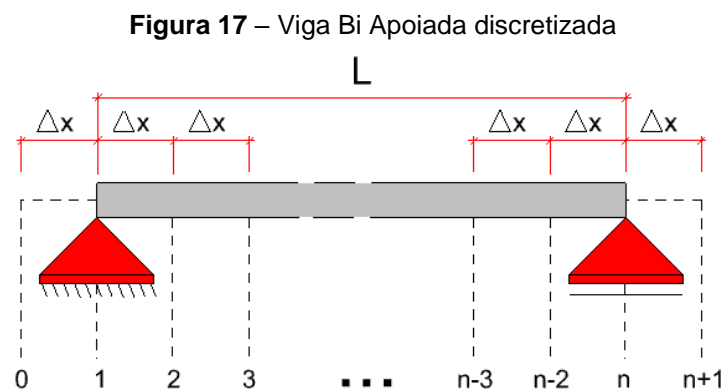
$$Y = \frac{Qx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{Q}{2kGA}(x^2 - 2Lx) \quad (94)$$

A primeira parcela representa a contribuição do momento fletor. A segunda parcela de ambas as equações representa a consideração “extra” de Timoshenko, ou seja, representa a parte do cortante na qual desloca o eixo da viga.

3.4 Equacionamento numérico

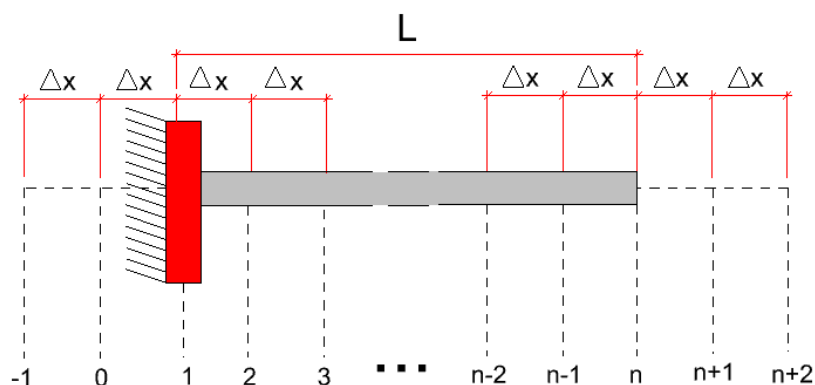
Nesta etapa do trabalho será aplicado o Método das Diferenças Finitas nas equações diferenciais mencionadas nos tópicos 2.1.1 e 2.1.2.

As vigas serão discretizadas em n nós, igualmente espaçados em uma distância Δx . Cada nó representa um ponto i , sendo que o ponto do primeiro apoio representa o ponto 1 e o ponto do último apoio representa o ponto n . Os nós existentes fora da viga são obtidos através das condições de contorno. A Figura 17 representa a viga bi apoiada discretizada e a Figura 18 representa a viga engaste-livre.



Fonte: Autor.

Figura 18 – Viga engaste-livre discretizada.



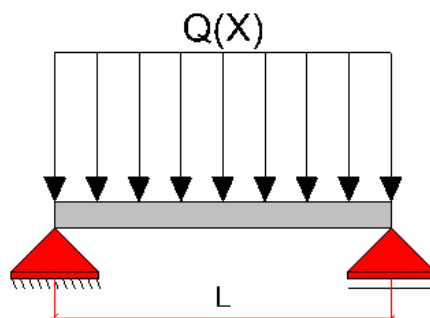
Fonte: Autor.

3.4.1 Modelo de Euler-Bernoulli

Viga Simplesmente Apoiada Com Carregamento Distribuído:

Considera-se uma viga de comprimento L , bi-apoiada, com carga uniformemente distribuída $Q(x)$, e supõem-se um módulo de elasticidade E e momento de inércia I .

Figura 19 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído



Fonte: Autor.

Tendo em vista que se trata de um carregamento distribuído, a equação da linha elástica está representada pela equação (4), demonstrada abaixo:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{Q}{EI}$$

Então para resolver essa solução e encontrar a deflexão dos pontos, aplica-se o Método das Diferenças Finitas, substituindo a derivada acima pela equação (23):

$$\left(\frac{d^4 Y}{dx^4}\right)_i = \frac{Y_{i+2} - 4Y_{i+1} + 6Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

Resultando em:

$$\frac{Y_{i+2} - 4Y_{i+1} + 6Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2}}{(\Delta x)^4} = \frac{Q}{EI} \quad (95)$$

Para conseguir resolver os pontos fora da viga, utiliza-se as condições de contorno explicadas no tópico 3.2.1, ou seja, tem-se:

a) Para $i=1$:

$$Y_1 = 0 \quad (96)$$

$$Y_{1+1} = -Y_{1-1} \rightarrow Y_2 = -Y_0 \quad (97)$$

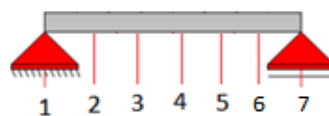
b) Para $i=n$:

$$Y_n = 0 \quad (98)$$

$$Y_{n+1} = -Y_{n-1} \quad (99)$$

Supõem-se inicialmente uma viga subdividida em 7 nós, conforme Figura 20.

Figura 20 – Viga Bi apoiada subdividida em 7 nós.



Fonte: Autor.

I. Para $i=2$:

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_0 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - Y_1 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_4 - 4Y_3 + 5Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (100)$$

II. Para i=3:

$$Y_5 - 4Y_4 + 6Y_3 - 4Y_2 + Y_1 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_5 - 4Y_4 + 6Y_3 - 4Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (101)$$

III. Para i=4:

$$Y_6 - 4Y_5 + 6Y_4 - 4Y_3 + Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (102)$$

IV. Para i=5:

$$Y_7 - 4Y_6 + 6Y_5 - 4Y_4 + Y_3 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$-4Y_6 + 6Y_5 - 4Y_4 + Y_3 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (103)$$

V. Para i=6:

$$Y_8 - 4Y_7 + 6Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$-Y_6 + 6Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$5Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (104)$$

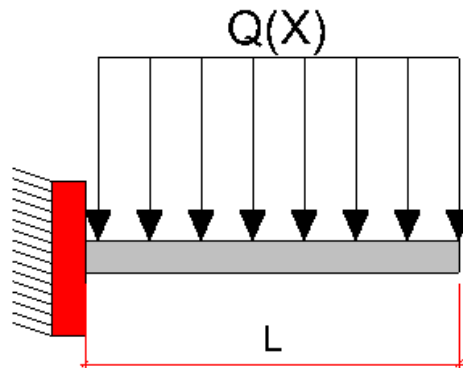
Colocando essas equações em um sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \end{bmatrix} \quad (105)$$

Viga Engastada em um Extremo e Livre no Outro Com Carregamento Distribuído:

A viga de estudo é uma viga de comprimento L , na qual na sua extremidade esquerda ($x=0$) possui um engaste e na extremidade direita ($x=L$) possui extremo livre. Além disso a viga possui módulo de elasticidade E e momento de inércia I . O carregamento é um carregamento distribuído $Q(x)$ por toda a extensão da viga.

Figura 21 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.



Fonte: Autor.

A linha elástica é representada pela equação (4), que é:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{Q}{EI}$$

Então para resolver essa solução e encontrar a deflexão dos pontos, aplica-se o MDF, substituindo a derivada acima pela equação (23), que é:

$$\left(\frac{d^4 Y}{dx^4}\right)_i = \frac{Y_{i+2} - 4Y_{i+1} + 6Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

Resultando em:

$$\frac{Y_{i+2} - 4Y_{i+1} + 6Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2}}{(\Delta x)^4} = \frac{Q}{EI} \quad (106)$$

No tópico 3.2.1 foi demonstrado as condições de contorno da viga. A viga de estudo deste tópico, tem que para i igual a 1 tem-se a condição de engaste, e para i igual a n a condição de extremo livre.

a) Para $i=1$, tem-se:

$$Y_1 = 0 \quad (107)$$

$$Y_{1+1} = Y_{1-1} \rightarrow Y_2 = Y_0 \quad (108)$$

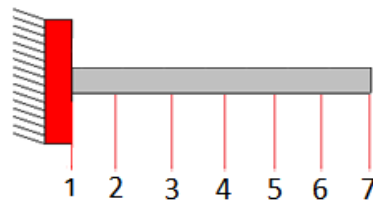
b) Para $i=n$, tem-se:

$$Y_{n+1} = 2 \cdot Y_n - Y_{n-1} \quad (109)$$

$$Y_{n+2} - 2 \cdot Y_{n+1} + 2 \cdot Y_{n-1} - Y_{n-2} = 0 \quad (110)$$

Supõem-se inicialmente uma viga subdividida em 7 nós, conforme Figura 22.

Figura 22 – Viga Engastada-livre subdividida em 7 nós.



Fonte: Autor.

I. Para $i=2$:

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_0 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 + Y_1 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_4 - 4Y_3 + 7Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (111)$$

II. Para i=3:

$$Y_5 - 4Y_4 + 6Y_3 - 4Y_2 + Y_1 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$Y_5 - 4Y_4 + 6Y_3 - 4Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (112)$$

III. Para i=4:

$$Y_6 - 4Y_5 + 6Y_4 - 4Y_3 + Y_2 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (113)$$

IV. Para i=5:

$$Y_7 - 4Y_6 + 6Y_5 - 4Y_4 + Y_3 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (114)$$

V. Para i=6:

$$Y_8 - 4Y_7 + 6Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$2Y_7 - Y_6 - 4Y_7 + 6Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$-2Y_7 + 5Y_6 - 4Y_5 + Y_4 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (115)$$

VI. Para i=7:

$$Y_9 - 4Y_8 + 6Y_7 - 4Y_6 + Y_5 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$4Y_7 - 4Y_6 + Y_5 - 4(2 \cdot Y_7 - Y_6) + 6Y_7 - 4Y_6 + Y_5 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$4Y_7 - 4Y_6 + Y_5 - 8 \cdot Y_7 + 4Y_6 + 6Y_7 - 4Y_6 + Y_5 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI}$$

$$2Y_7 - 4Y_6 + 2Y_5 = \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \quad (116)$$

Colocando essas equações em um sistema matricial, obtém-se:

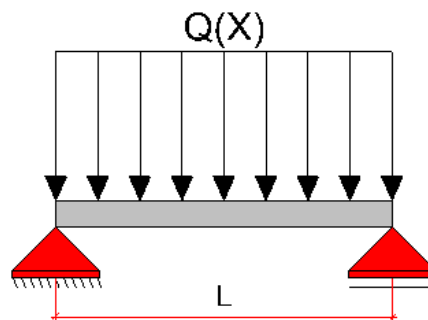
$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \\ \frac{Q(\Delta x)^4}{EI} \end{bmatrix} \quad (117)$$

3.4.2 Modelo de Timoshenko

Viga Simplesmente Apoiada Com Carregamento Distribuído:

Considera-se uma viga do modelo Timoshenko com carregamento uniformemente distribuído $Q(x)$, comprimento L e simplesmente apoiada em ambos os extremos. Supõem-se um módulo de elasticidade E , momento de inércia I , módulo de elasticidade transversal G , área da seção A um fator de correção ao cisalhamento que depende da forma geométrica da seção igual a k .

Figura 23 – Viga Bi apoiada com carregamento distribuído



Fonte: Autor.

As equações (10) e (13) regem os deslocamentos de uma viga de Timoshenko, submetidas a um carregamento $Q(x)$:

$$kGA \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d^2Y}{dx^2} \right) = Q \quad (1^a)$$

$$EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} - kGA \left(\varphi - \frac{dY}{dx} \right) = 0 \quad (2^a)$$

As aproximações das diferenças finitas que serão substituídas nas equações acima, são as equações (20), (21), (24) e (25) representadas respectivamente abaixo:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

$$\left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

$$\left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Então, substituindo a primeira equação governante pelas respectivas aproximações das diferenças finitas da equação, chega-se a seguinte expressão:

$$kGA \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)} - \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) = Q$$

$$\Delta x(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - 2(Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \rightarrow 1^a \text{ equação} \quad (118)$$

E substituindo as derivadas parciais da segunda equação governante pelas aproximações, e sabendo que $\varphi = \varphi_i$, obtém-se:

$$EI \left(\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \right) = kGA \left(\varphi_i - \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2(\Delta x)} \right)$$

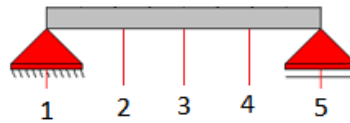
$$2EI \left(\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2(\Delta x)^2} \right) - kGA \left(\frac{2(\Delta x)^2 \varphi_i - \Delta x(Y_{i+1} - Y_{i-1})}{2(\Delta x)^2} \right) = 0$$

$$2EI(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - kGA(2(\Delta x)^2 \varphi_i - \Delta x(Y_{i+1} - Y_{i-1})) = 0$$

$$2EI(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_i) + kGA(\Delta x)(Y_{i+1} - Y_{i-1}) = 0 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ equação} \quad (119)$$

Para conseguir obter um sistema de equações possível, com o mesmo número de variáveis e de equações, é necessário aplicar as condições de contorno. Assim, para encontrar as equações que representam as equações das extremidades e as equações vizinhas da extremidade, subdividiu-se a viga em 5 nós (2 nós de extremidades, 2 nós vizinhos ao contorno e 1 nó intermediário), para facilitar o cálculo e o entendimento.

Figura 24 – Viga Bi apoiada subdividida em 5 nós.



Fonte: Autor.

I. Para $i=1$ (nó da extremidade):

Substituindo $i=1$ para o nó da extremidade esquerda (ponto do apoio), tem-se:

$$\Delta x(\varphi_2 - \varphi_0) - 2(Y_2 - 2Y_1 + Y_0) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (120)$$

$$2EI(\varphi_2 + \varphi_0) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_1) + kGA(\Delta x)(Y_2 - Y_0) = 0 \quad (121)$$

Considerando as condições de contorno mencionadas no tópico 3.2.2, tem-se que para $i=1$:

$$\varphi_2 = \varphi_0 \quad (122)$$

$$Y_1 = 0 \quad (123)$$

Substituindo as equações acima na equação (120), obtém-se:

$$Y_0 = -\frac{Q(\Delta x)^2}{kGA} - Y_2 \quad (124)$$

Substituindo as condições de contorno e a equação acima na equação (121), tem-se:

$$4EI(\varphi_2) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_1) + 2Y_2kGA(\Delta x) = Q(\Delta x)^3 \quad (125)$$

II. Para $i=5$ (nó da extremidade):

Substituindo $i=5$ para o nó da extremidade direita (ponto do apoio)

$$\Delta x(\varphi_6 - \varphi_4) - 2(Y_6 - 2Y_5 + Y_4) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (126)$$

$$2EI(\varphi_6 + \varphi_4) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_5) + kGA(\Delta x)(Y_6 - Y_4) = 0 \quad (127)$$

Considerando as condições de contorno mencionadas no tópico 3.2.2, tem-se que para $i=5$:

$$\varphi_6 = \varphi_4 \quad (128)$$

$$Y_5 = 0 \quad (129)$$

Substituindo as equações acima na equação (126), obtém-se:

$$Y_6 = -\frac{Q(\Delta x)^2}{kGA} - Y_4 \quad (130)$$

Substituindo as condições de contorno e a equação acima na equação (127), tem-se:

$$4EI(\varphi_4) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_5) + kGA(\Delta x) \left(-\frac{Q(\Delta x)^2}{kGA} - Y_4 - Y_4 \right) = 0$$

$$4EI(\varphi_4) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_5) - 2kGA(\Delta x)Y_4 = -Q(\Delta x)^3 \rightarrow 2^a \text{ equação} \quad (131)$$

III. Para i=2 (nó vizinho ao contorno):

Substituindo i=2 e as condições de contorno mencionadas previamente, tem-se:

$$\Delta x(\varphi_3 - \varphi_1) - 2(Y_3 - 2Y_2 + Y_1) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA}$$

$$\Delta x(\varphi_3 - \varphi_1) - 2(Y_3 - 2Y_2) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ equação} \quad (132)$$

$$2EI(\varphi_3 + \varphi_1) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_2) + kGA(\Delta x)(Y_3 - Y_1) = 0$$

$$2EI(\varphi_3 + \varphi_1) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_2) + kGA(\Delta x)(Y_3) = 0 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ equação} \quad (133)$$

IV. Para i=4 (nó vizinho ao contorno):

Substituindo i=2 e as condições de contorno mencionadas previamente, tem-se:

$$\Delta x(\varphi_5 - \varphi_3) - 2(Y_5 - 2Y_4 + Y_3) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA}$$

$$\Delta x(\varphi_5 - \varphi_3) + 4Y_4 - 2Y_3 = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ equação} \quad (134)$$

$$2EI(\varphi_5 + \varphi_3) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_4) + kGA(\Delta x)(Y_5 - Y_3) = 0$$

$$2EI(\varphi_5 + \varphi_3) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_4) + kGA(\Delta x)(-Y_3) = 0 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ equação} \quad (135)$$

V. Para i=3 (nó intermediário):

Substituindo i=3 nas equações (118) e (119), tem-se:

$$\Delta x(\varphi_4 - \varphi_2) - 2(Y_4 - 2Y_3 + Y_2) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ equação} \quad (136)$$

$$2EI(\varphi_4 + \varphi_2) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_3) + kGA(\Delta x)(Y_4 - Y_2) = 0 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ equação} \quad (137)$$

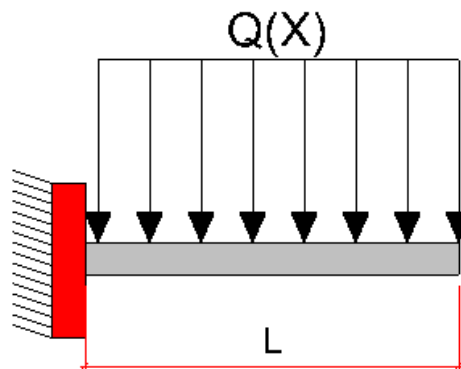
Juntando as equações obtidas nos itens I ao V, obtém-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & 2kGA(\Delta x) & 4EI & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta x & 4 & 0 & -2 & \Delta x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\Delta x & 4 & 0 & -2 & \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -\Delta x & 4 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & 0 & 2EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2kGA(\Delta x) & 4EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \varphi_1 \\ Y_2 \\ \varphi_2 \\ Y_3 \\ \varphi_3 \\ Y_4 \\ \varphi_4 \\ Y_5 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q(\Delta x)^3 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 0 \\ -Q(\Delta x)^3 \end{pmatrix} \quad (138)$$

Viga Engastada em um Extremo e Livre no Outro Com Carregamento Distribuído:

Tem-se uma viga do modelo Timoshenko com carregamento uniformemente distribuído $Q(x)$, comprimento L , engastada no extremo esquerdo ($x=0$) e com o outro extremo ($x=L$) livre. Supõem-se um módulo de elasticidade E , momento de inércia I , módulo de elasticidade transversal G , área da seção A um fator de correção ao cisalhamento que depende da forma geométrica da seção igual a k .

Figura 25 – Viga engastada-livre com carregamento distribuído.



Fonte: Autor.

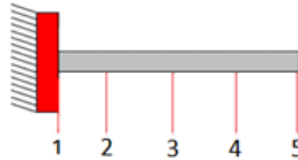
A viga engastada com carregamento distribuído rege a mesma equação de deslocamento que a viga **bi-apoiada** com carregamento distribuído do **modelo de Timoshenko**. A única diferença entre ambas, são as condições de contorno.

As equações finais do deslocamento da viga, com a aplicação das aproximações das diferenças finitas são representadas pelas equações **(118)** e **(119)**:

$$\Delta x(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - 2(Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ equação}$$

$$2EI(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_i) + kGA(\Delta x)(Y_{i+1} - Y_{i-1}) = 0 \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ equação}$$

Figura 26 – Viga Engastada-livre subdividida em 5 nós.



Fonte: Autor.

I. Para $i=2$ (nó vizinho ao contorno):

Substituindo $i=2$ para o nó vizinho ao da extremidade esquerda (ponto do apoio), tem-se:

$$\Delta x(\varphi_3 - \varphi_1) - 2(Y_3 - 2Y_2 + Y_1) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (139)$$

$$2EI(\varphi_3 + \varphi_1) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_2) + kGA(\Delta x)(Y_3 - Y_1) = 0 \quad (140)$$

Considerando as condições de contorno mencionadas no tópico 3.2.2, tem-se que para $i=1$:

$$\varphi_1 = 0 \quad (141)$$

$$Y_1 = 0 \quad (142)$$

Substituindo as condições de contorno acima nas equações (139) e (140) obtém-se:

$$\Delta x(\varphi_3) - 2Y_3 + 4Y_2 = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (143)$$

$$2EI(\varphi_3) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_2) + kGA(\Delta x)(Y_3) = 0 \quad (144)$$

II. Para $i=3$ (nó intermediário):

Substituindo $i=3$ para o nó da extremidade direita (ponto do apoio)

$$\Delta x(\varphi_4 - \varphi_2) - 2(Y_4 - 2Y_3 + Y_2) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (145)$$

$$2EI(\varphi_4 + \varphi_2) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_3) + kGA(\Delta x)(Y_4 - Y_2) = 0 \quad (146)$$

III. Para $i=4$ (nó vizinho a extremidade direita):

Substituindo $i=4$ nas equações finais de deslocamento da viga, tem-se:

$$\Delta x(\varphi_5 - \varphi_3) - 2(Y_5 - 2Y_4 + Y_3) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (147)$$

$$2EI(\varphi_5 + \varphi_3) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_4) + kGA(\Delta x)(Y_5 - Y_3) = 0 \quad (148)$$

IV. Para $i=5$ (nó da extremidade):

Substituindo $i=5$ nas equações finais de deslocamento da viga, tem-se:

$$\Delta x(\varphi_6 - \varphi_4) - 2(Y_6 - 2Y_5 + Y_4) = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (149)$$

$$2EI(\varphi_6 + \varphi_4) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_5) + kGA(\Delta x)(Y_6 - Y_4) = 0 \quad (150)$$

Considerando as condições de contorno mencionadas no tópico 3.2.2, tem-se que para $i=5$:

$$\varphi_6 = \varphi_4 \quad (151)$$

$$Y_6 = 2(\Delta x)\varphi_5 + Y_4 \quad (152)$$

Substituindo as condições de contorno acima nas equações (149) e (150) obtém-se:

$$-4Y_4 + 4Y_5 - 4(\Delta x)\varphi_5 = \frac{2Q(\Delta x)^2}{kGA} \quad (153)$$

$$4EI(\varphi_4) - (2kGA(\Delta x)^2 + 4EI)(\varphi_5) + 2kGA(\Delta x)^2(\varphi_5) = 0$$

$$4EI(\varphi_4) - (4EI)(\varphi_5) = 0 \quad (154)$$

Juntando as equações obtidas nos itens I ao V, obtém-se o sistema:

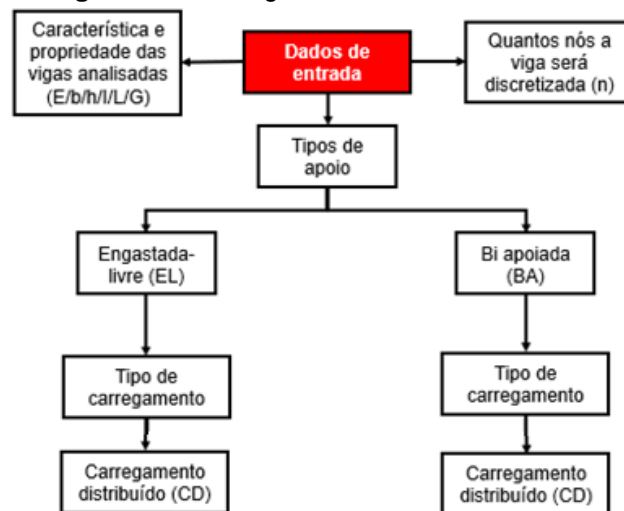
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & \Delta x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\Delta x & 4 & 0 & -2 & \Delta x & 0 & 0 \\ -kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\Delta x & 4 & 0 & -2 & \Delta x \\ 0 & 0 & -kGA(\Delta x) & 2EI & 0 & -2kGA(\Delta x)^2 - 4EI & kGA(\Delta x) & 2EI \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & -4\Delta x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4EI & 0 & -4EI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_2 \\ \varphi_2 \\ Y_3 \\ \varphi_3 \\ Y_4 \\ \varphi_4 \\ Y_5 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \\ 2Q(\Delta x)^2/kGA \\ 0 \end{pmatrix} \quad (155)$$

3.5 Pensamento computacional

A partir das equações demonstradas, será elaborado um algoritmo, na linguagem do *Octave*, no qual haverá dados de entrada e de saída.

Os dados necessários para dar entrada no algoritmo são: características e propriedades das vigas analisadas (item 3.1), quantos nós será discretizada a viga e qual o tipo de apoio. A Figura 27 mostra o fluxograma de como funcionará esses dados de entrada.

Figura 27 – Fluxograma dos dados de entrada



Fonte: Autor.

Tendo esses dados, consegue-se definir qual a matriz dos coeficientes das diferenças finitas, e a matriz dos esforços e a incógnita que será a matriz da deflexão.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes das diferenças finitas;}$$

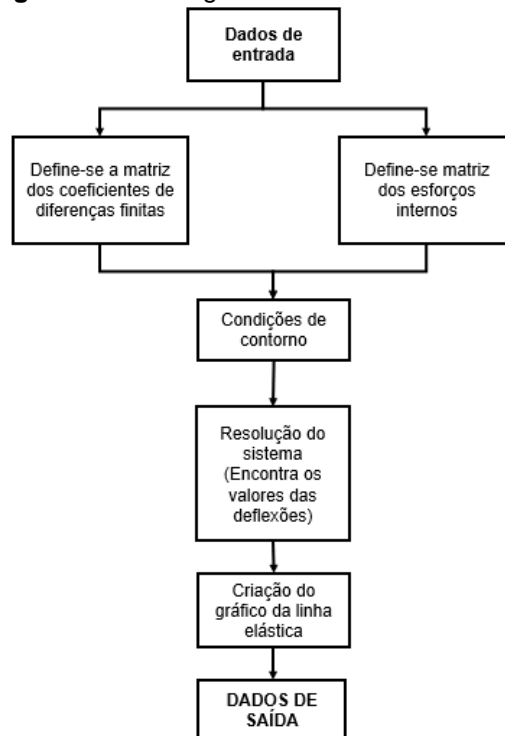
$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz da deflexão;}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \text{ é a matriz de esforços internos;}$$

$$[A] \cdot [Y] = [F] \quad (156)$$

Ou seja, o algoritmo será elaborado seguindo a seguinte rotina de cálculo:

Figura 28 – Fluxograma dos dados de entrada



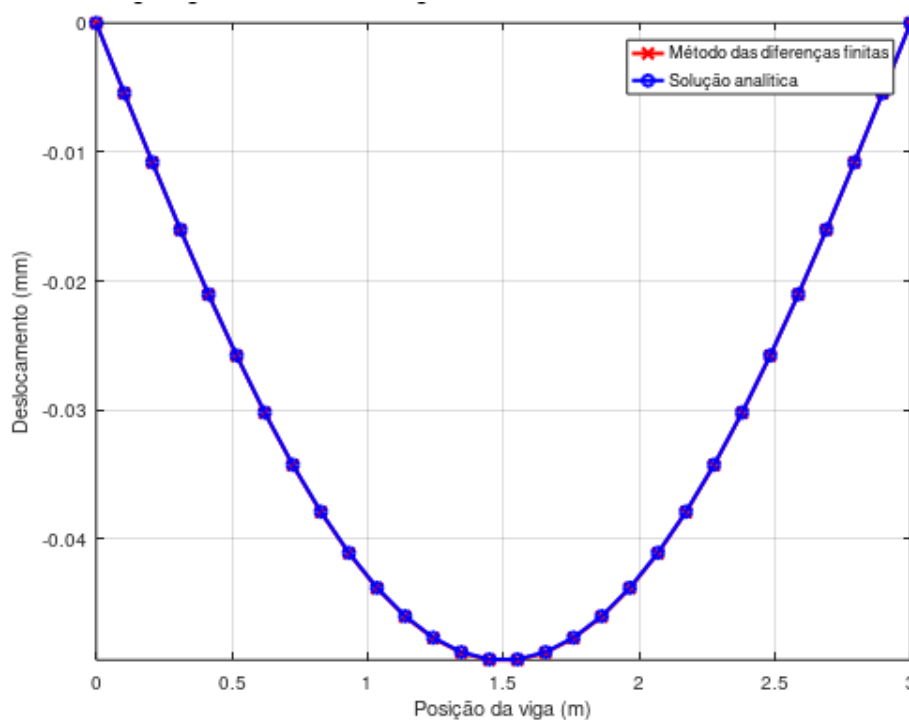
Fonte: Autor.

Tendo o valor da deflexão, consegue-se montar o gráfico da linha elástica das vigas e por seguinte a obtenção de um gráfico comparativo entre o modelo de viga Timoshenko e Euler-Bernoulli. Assim, será possível comparar ambos os modelos com suas respectivas soluções analíticas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

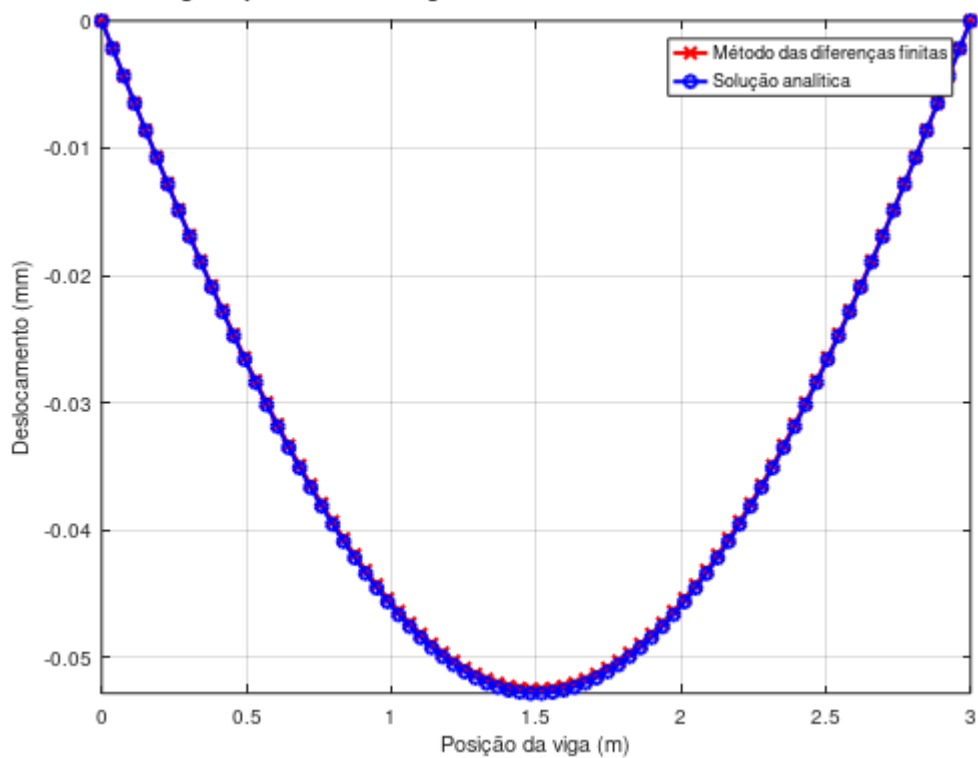
Após a construção dos algoritmos, adotou-se uma viga para análise dos resultados, no qual possui as seguintes características: 3 metros de comprimento (L), 50 cm de altura (h) e 50 cm de largura (b). O carregamento distribuído é de 50kN/m, módulo de elasticidade $2,05 \cdot 10^8$ kN/m² (Aço isotrópico), coeficiente de Poisson 0,3 e o fator de correção ao cisalhamento 0,833 (seção retangular). Subdividiu-se a viga em 30 e 80 nós nos modelos de Euler-Benoulli e de Timoshenko respectivamente. Assim foi elaborado o gráfico da deflexão da viga para comparar o MDF e da solução analítica.

Figura 29 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga bi apoiada com carregamento distribuído – Modelo Euler Bernoulli.



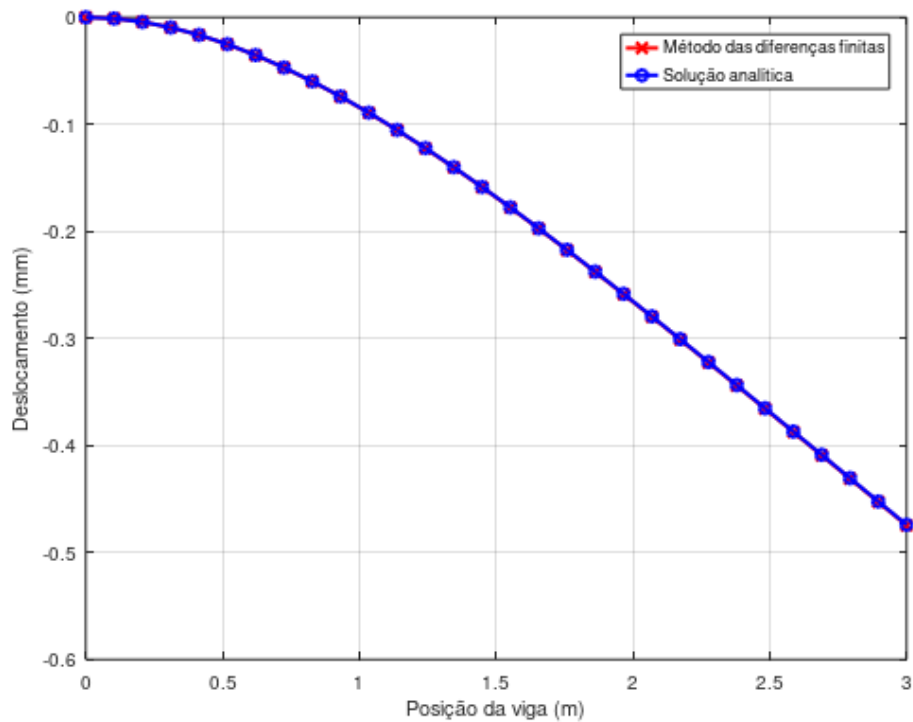
Fonte: Autor.

Figura 30 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga bi_ apoiada com carregamento distribuído – Modelo Timoshenko.



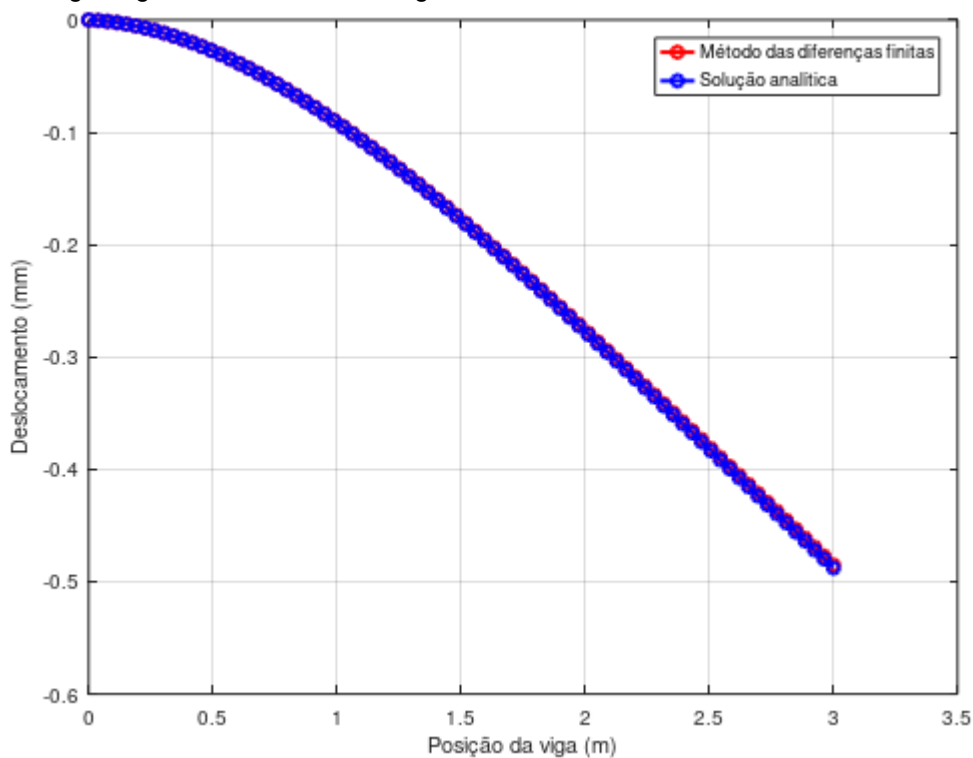
Fonte: Autor.

Figura 31 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga engastada-livre com carregamento distribuído – Modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Autor.

Figura 32 – Comparativo entre as soluções do método das diferenças finitas e as soluções analíticas da viga engastada-livre com carregamento distribuído – Modelo de Timoshenko.

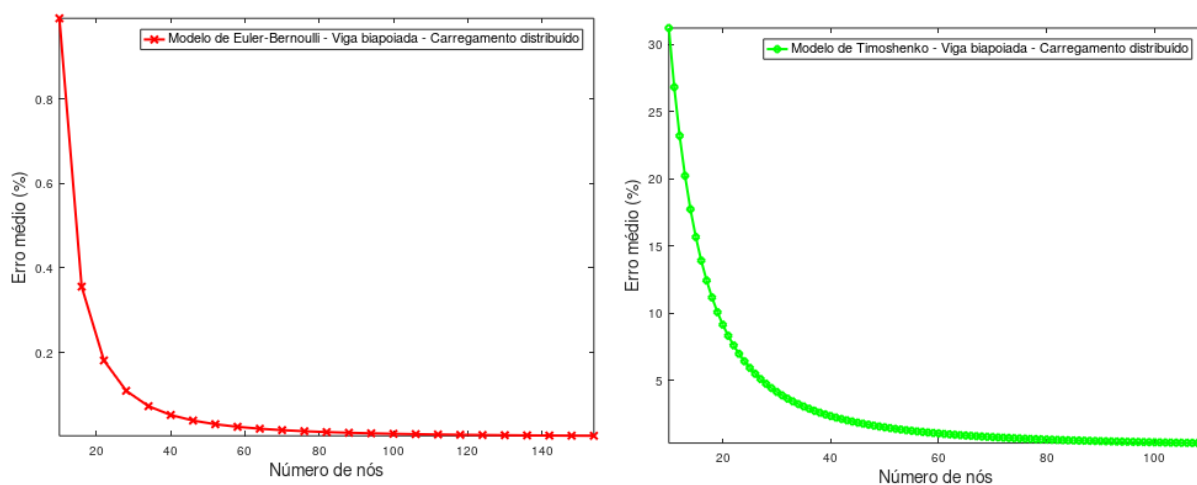


Fonte: Autor.

Percebe-se que as curvas da solução analítica e do método das diferenças são praticamente coincidentes, o que valida os algoritmos implementados.

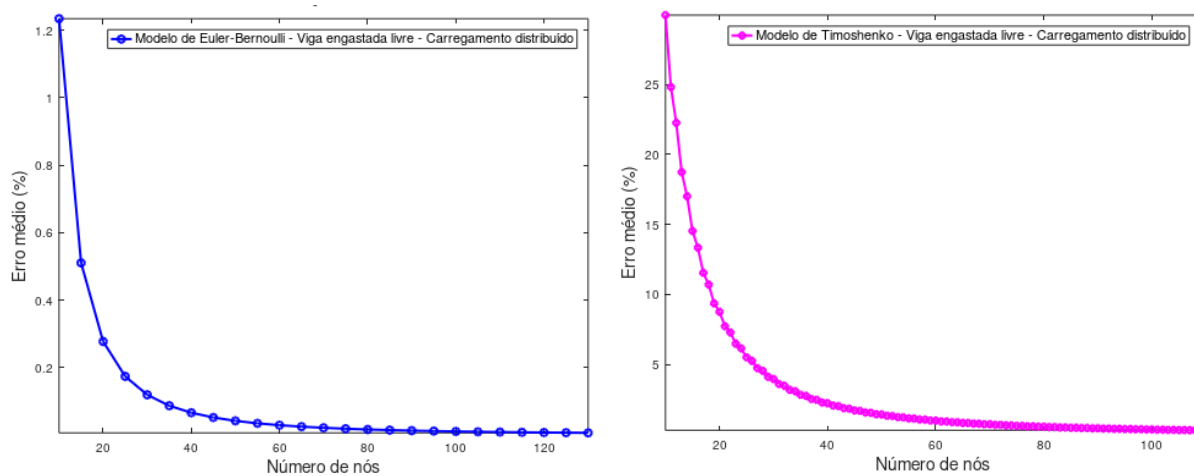
Com finalidade de medir a convergência do método das diferenças finitas com a solução analítica, nas vigas bi apoiadas comparou-se o valor da flecha no meio do vão e nas vigas engastadas-livre comparou o valor da flecha na extremidade livre, comparando a malha em ordem crescente de refinamento. Os gráficos a seguir mostram a convergência entre ambos os métodos de acordo com a malha.

Figura 33 – Gráfico comparativo entre número de nós discretizada a viga e erro médio. Vigas Biapoiadas com carregamento distribuídos.



Fonte: Autor.

Figura 34 – Gráfico comparativo entre número de nós no qual a viga foi discretizada e erro médio. Vigas Engastada-livre com carregamento distribuídos.



Fonte: Autor.

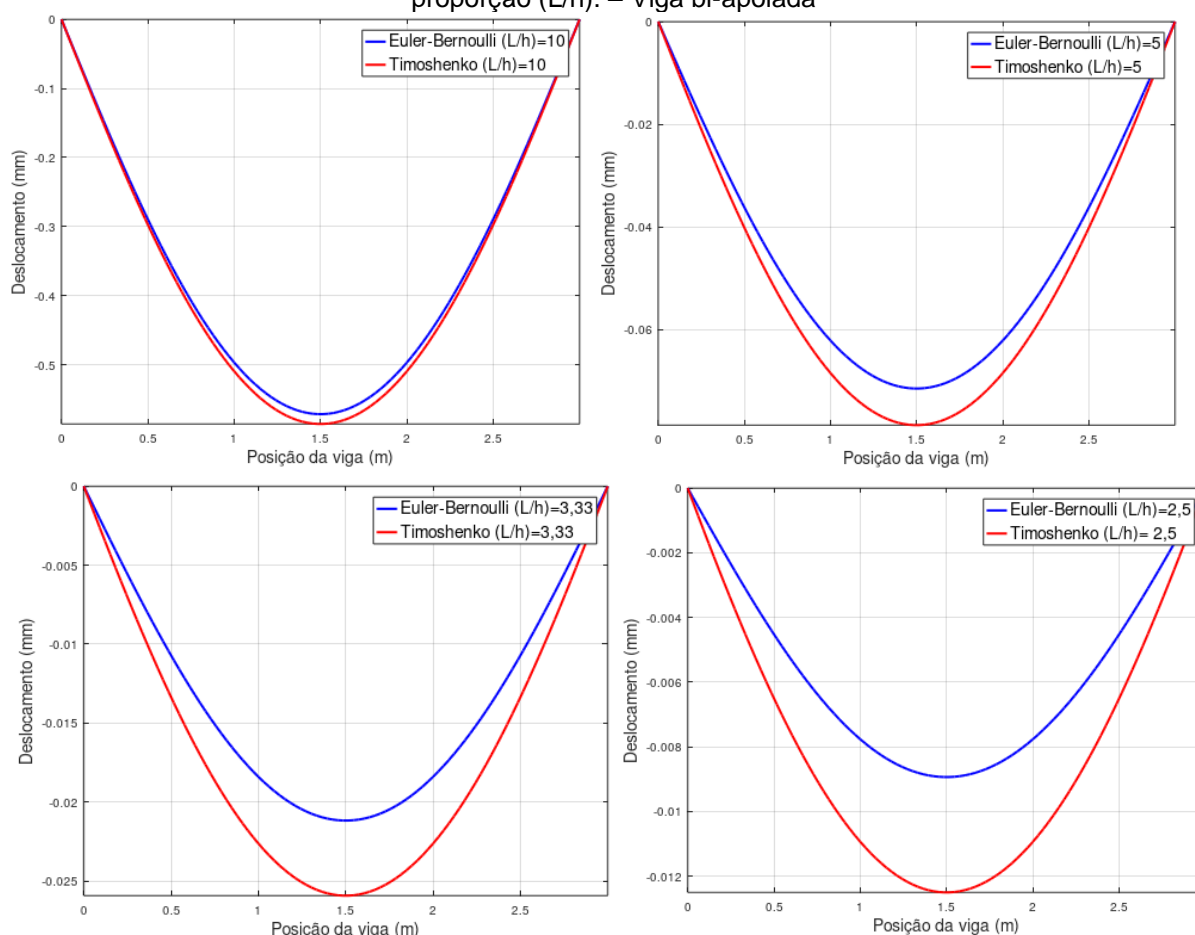
Observa-se na Figura 33 e na Figura 34, que quanto maior o número de nós na malha maior a convergência dos métodos. Além disso, pode-se observar que a convergência do modelo de Euler-Bernoulli é muito mais rápida em relação ao de Timoshenko, já apresentando valores de erro próximo de 1% para uma malha de 10 nós na viga bi apoiada e um erro próximo a 1,2% para a viga engastada-livre. A viga bi apoiada de Timoshenko só atinge erros menores do que 1% com malha a partir de 61 nós e a viga engastada-livre de Timoshenko a partir de 59 nós. Tal comportamento se deve a estrutura matemática de cada modelo, pois o modelo de Timoshenko é

representado por duas equações diferenciais e o modelo de Euler-Bernoulli é representado por apenas uma.

4.1 Estudo paramétrico

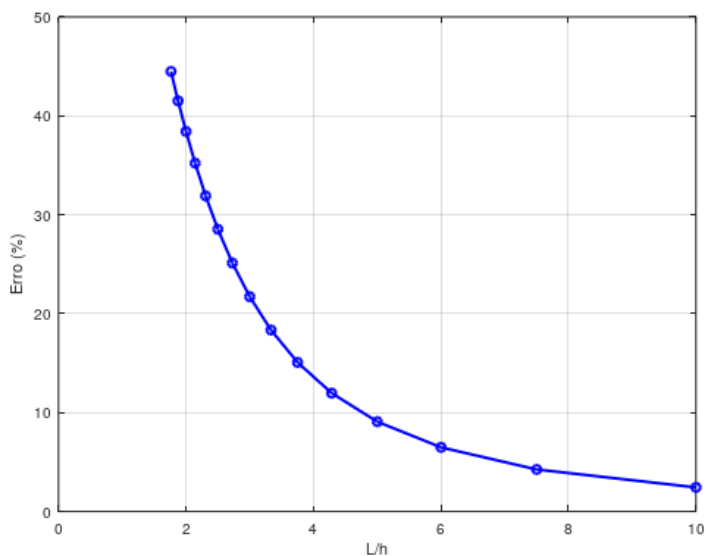
Souza e Mendonça (2008) afirmam que o modelo de Timoshenko é verificado principalmente em viga com moderada relação entre o comprimento da viga e a altura de sua seção transversal. Logo, para verificar tal comportamento, manteve-se fixo todas as variáveis do algoritmo, variando apenas a altura da viga (h), conseqüentemente variando a proporção (L/h). As características das vigas analisadas estão expostas no item 3.1. Tal análise está sendo apresentada na Figura 35.

Figura 35 – Análise comparativa entre a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, variando a proporção (L/h). – Viga bi-apoiada



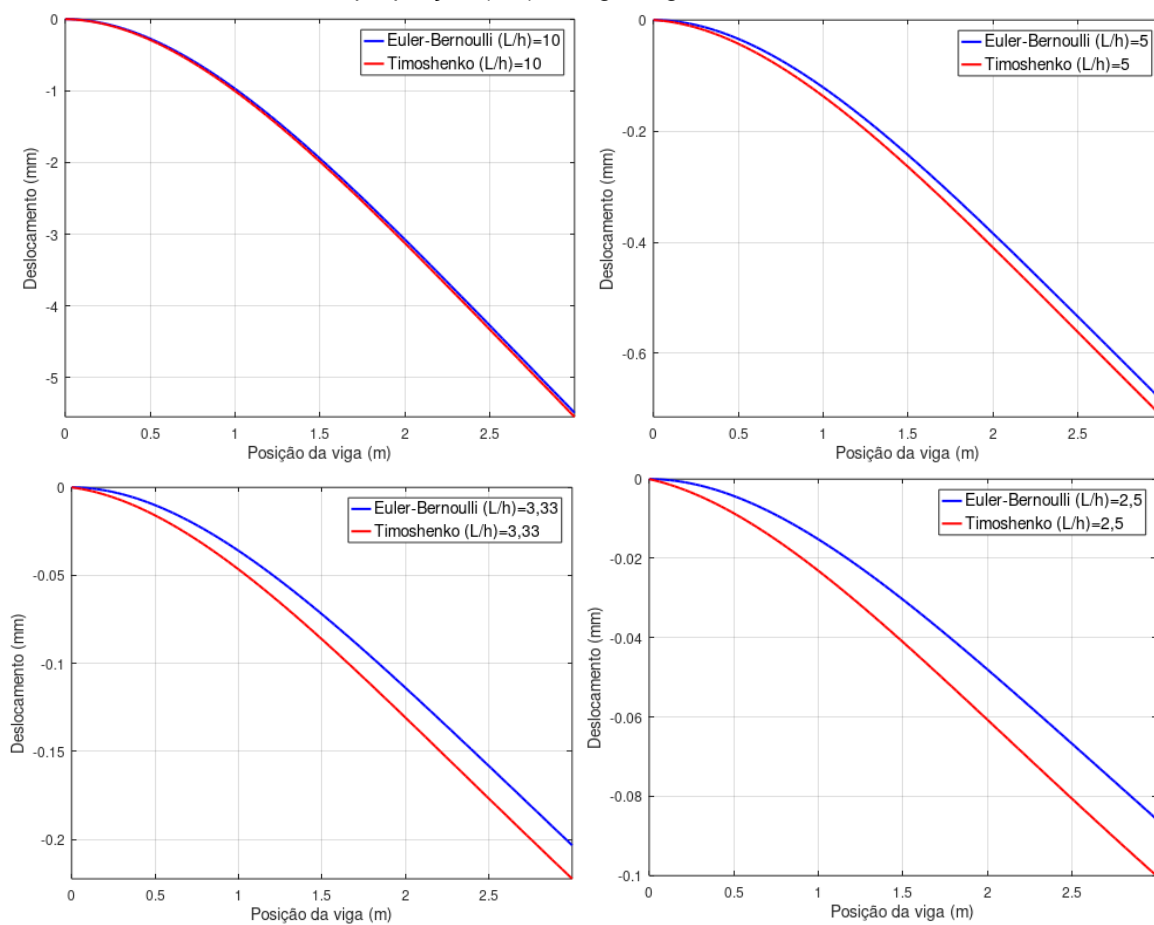
Fonte: Autor.

Figura 36– Erro médio da deflexão em reação a proporção (L/h). – Viga bi-apoiada

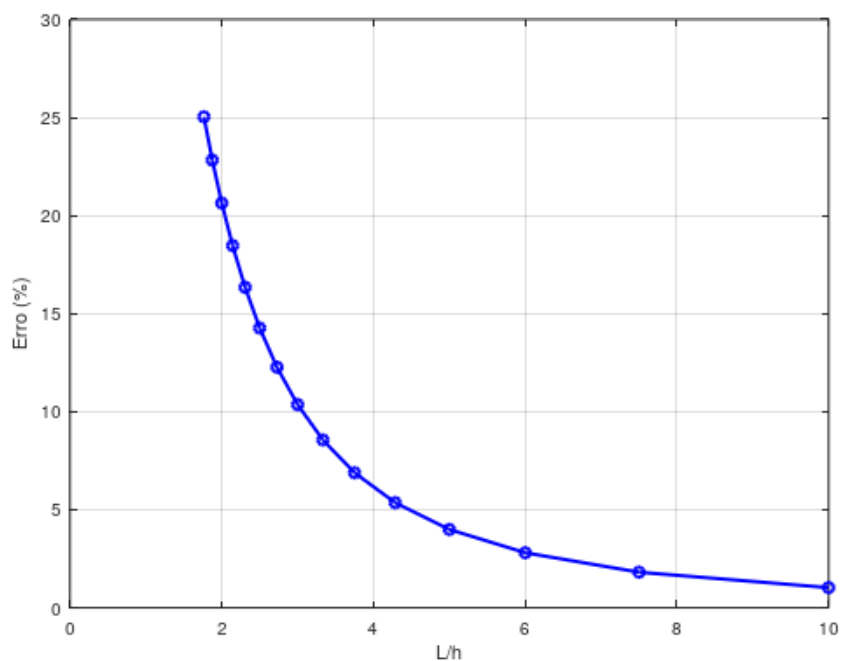


Fonte: Autor.

Figura 37 – Análise comparativa entre a teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, variando a proporção (L/h). – Viga engastada-livre



Fonte: Autor.

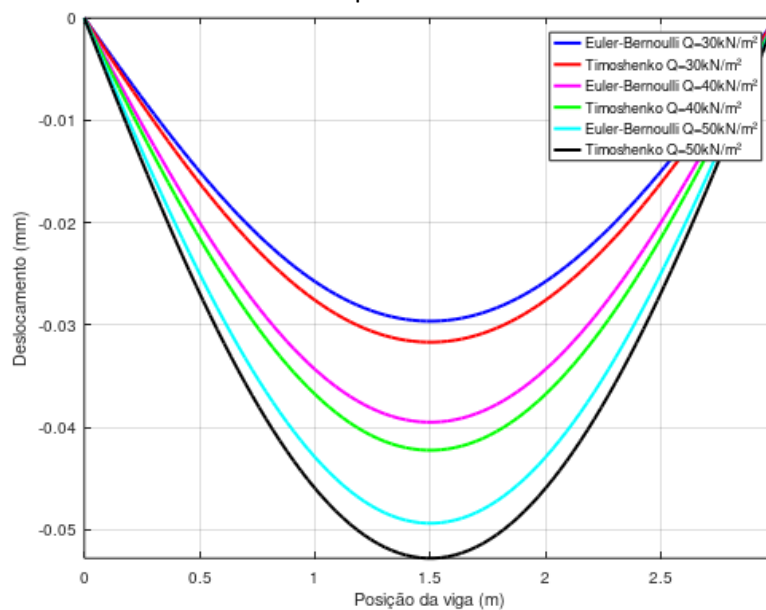
Figura 38 – Erro médio da deflexão em reação a proporção (L/h). – Viga engastada-livre

Fonte: Autor.

A partir da Figura 37 e da Figura 38, consegue-se confirmar que a teoria de Timoshenko é mais representativa em vigas que possuam menor relação L/h, tanto para a viga bi-apoiada quando para a viga engastada-livre. Ou seja, quanto maior a altura para o mesmo comprimento de viga, maior a atuação do cisalhamento na seção.

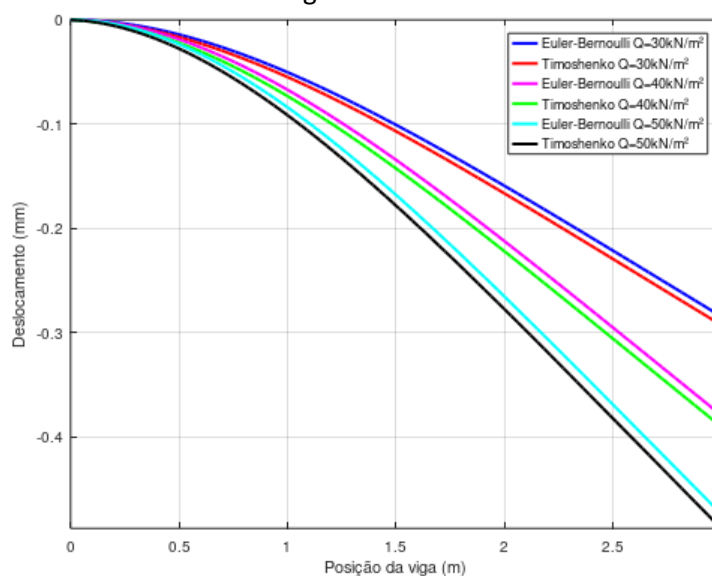
Conforme mencionado no item 3.1, para complementar o estudo e verificar se o carregamento também influi para deixar o efeito de cisalhamento mais representativo, elaborou-se um gráfico variando tal fator (Figura 39 e Figura 40).

Figura 39 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o carregamento – Viga bi-apoiada.



Fonte: Autor.

Figura 40 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o carregamento – Viga engastada-livre



Fonte: Autor.

A partir do Figura 39 e da Figura 40, conclui-se que o aumento do carregamento não torna a atuação do cisalhamento mais expressiva.

Os gráficos Figura 41 e Figura 42 exibem a deflexão da viga variando apenas o módulo de elasticidade da viga.

Figura 41 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o módulo de elasticidade – Viga bi-apoiada.

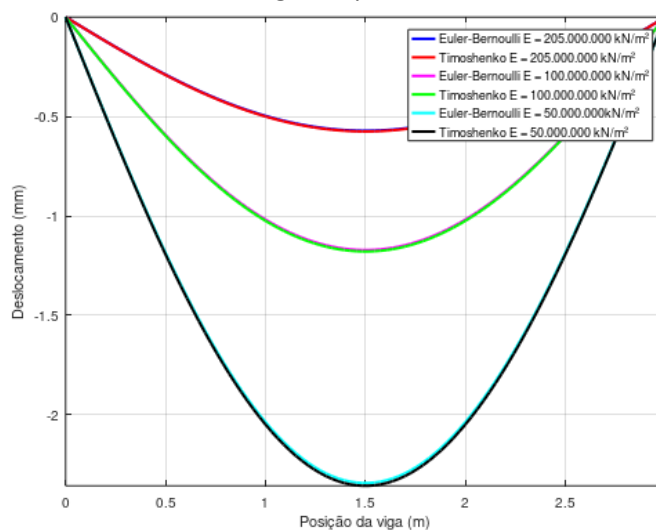
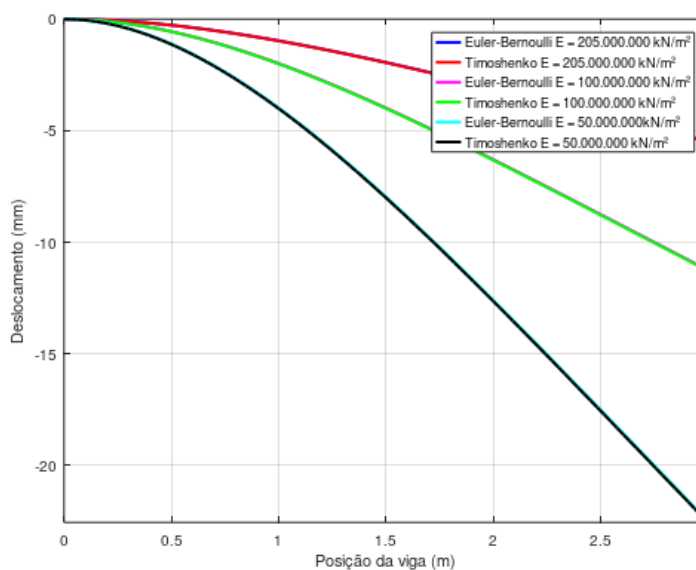


Figura 42 – Deflexão da viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko variando o módulo de elasticidade – Viga engastada-livre.



A partir dos gráficos acima, conclui-se que a variação do módulo de elasticidade também não torna a atuação do cisalhamento mais representativa.

5 CONCLUSÃO

Com a implementação de algoritmos no programa Octave, tornou-se possível visualizar os gráficos e valores da deflexão da viga, de modo a atingir o objetivo do trabalho: comparar as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

O Método das Diferenças Finitas se mostrou bastante eficiente na resolução das equações diferenciais de estudo tanto para a teoria de Euler-Bernoulli quanto para a teoria de Timoshenko.

A convergência da solução numérica com a solução analítica da teoria de Euler-Bernoulli foi bem mais simples que em relação a teoria de Timoshenko. Tal comportamento se deve a estrutura matemática de cada modelo, pois o modelo de Timoshenko é representado por duas equações diferenciais e o modelo de Euler-Bernoulli é representado por apenas uma.

Foi feita uma análise simulando diferentes condições de materiais (diferentes módulos de elasticidade), diferentes carregamentos e diferentes alturas da viga, para verificar em qual cenário tornaria a teoria de Timoshenko mais expressiva em relação a teoria de Euler-Bernoulli. Os fatores módulo de elasticidade e carregamento não tornaram a atuação do cisalhamento mais expressiva, as curvas de deflexão entre ambas as teorias praticamente coincidiram, com um leve aumento de valor na teoria de Timoshenko, justificada pela consideração dos efeitos de cisalhamento. Ao aumentar gradativamente a altura, com o mesmo vão, percebeu-se uma maior pronúncia dos efeitos cisalhantes e as curvas de deflexão entre ambas as teorias já não ficaram mais aderentes.

Apesar da teoria de Timoshenko ser justificada em determinados casos, pode-se preferir a utilização da teoria de Euler-Bernoulli para calcular a deflexão da viga, visto que os valores ainda assim são bem próximos e a complexidade da estrutura matemática da teoria de Euler-Bernoulli é bem menor.

6 CONSIDERAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base na experiência adquirida ao longo do desenvolvimento deste trabalho, como sugestão para trabalho futuro, pode-se propor a análise de vigas com outro tipo de carregamento, como por exemplo a carga concentrada.

Além disso, seria interessante a análise da viga com carregamento dinâmico visto que este trabalho analisou apenas o comportamento estático.

Pode-se, ainda, analisar vigas com diferentes tipos de apoio.

E por fim, outra abordagem que pode ser feita em trabalhos futuros seria uma análise em outro tipo de elemento estrutural, como pilares ou lajes.

7 REFERÊNCIAS

ALMEIDA NETO, Fernando Gonçalves de; NASCIMENTO, Vítor Heloiz. **Apostila Introdutória de Matlab/Octave**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011.

ANDRADE, A. J. C.; LOEFFLER, C. F.. **Comparação entre Resultados Analíticos e do Método dos Elementos de Contorno para o Problema de Transferência de Calor Bidimensional**. 2015. Disponível em: <<http://pdf.blucher.com.br.s3-sa-east-1.amazonaws.com/physicsproceedings/vi-efa/006.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2018.

CAMPANARI, F. A. **Teoria das Estruturas I**. Ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A., 1985. 432p

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P.. **Métodos Numéricos para Engenharia**. São Paulo: Amgh Editora Ltda., 2011.

COSTA, Sânzara Nhiaia Jardim. **O modelo de Timoshenko em Vigas Elásticas, Estrutura Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial**. 2006. 274 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

Cowper, G. R. **The shear coefficient in Timoshenko's beam theory**. *Journal of applied mechanics*. 1966.

DEUS, L. R. et al. **MDF: conceitos básicos e algumas aplicações na engenharia estrutural**. Belo Horizonte: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2010.

HIBBELER, H. B. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

FLEISCHFRESSER, Sergio Augusto. **Uma Fomulação do Método dos Elementos de Contorno para a Análise de Vigas de Timoshenko**. 2012. 121 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Pelo Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

FRANCO, Admilson T.. **Métodos Numéricos Aplicados À Engenharia**: Introdução aos Métodos de Diferenças Finitas e de Volumes Finitos. Curitiba: Lacity, 2011.

HIBBELER, R. C.. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

JANSEN, Rafael. **Teoria das Estruturas**. Disponível em: <<https://edoc.site/apostila-teoria-das-estruturas-1-pdf-free.html>>. Acesso em: 13 out. 2018.

JUNIOR, Jair. **Introdução Ao Gnu Octave**. 2017. Disponível em: <<http://www.jairjunior.eng.br/artigos/introducao-ao-gnu-octave/>>. Acesso em: 16 out. 2018.

PINTO, Fernando A. A. **Vigas** Notas de aula. Universidade Federal do Paraná. 2000. Disponível em < <http://www.cesec.ufpr.br/etools/firstapplets/faap/teoria1j.html>>. Acesso em: 20 set. 2018.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. Rio de Janeiro: Makron Books, 1996.

SILVA, Sebastião S.; SILVA, William T. M. Estudo de pórticos planos utilizando um elemento finito de viga unificado em um programa de análise linear. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, Santa Fe, v. XXIX, n. 17, p. 1803-1815, nov. 2010.

SOUZA, M. R. A.; MENDONÇA, A. V. **Análise Dinâmica De Uma Viga De Timoshenko Apoiada Sobre Base Elástica Utilizando Equações Integrais**: Um Caso Particular. Natal: Ermac, 2008.

SOUZA, Calebe Paiva Gomes de; CRUZ, Gustavo Guimarães. Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab. **Revista Tecnologia**, Fortaleza, v. 39, n. 1, p.1-12, jun. 2018.

TEIXEIRA, Cássia Barbosa. **Tutorial GNU Octave/Matlab**. 2005. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~marcio/tut2005/octave/042565Cassia.pdf>>. Acesso em: 01 out. 2018.

TEIXEIRA, Sergio Roberto. **OCTAVE** - Uma Introdução: Primeiros contatos com o ambiente de programação numérica Octave. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2010.

TIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James E.. **Mecânica dos Sólidos**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1983.

APÊNDICE A – ALGORITMO DA DEFLEXÃO DE VIGA DO MODELO DE EULER-BERNOULLI E DE TIMOSHENKO

%dados de entrada

```

fprintf('Escolha o modelo de viga: \n')
TEB = input('Digite 1 para calcular a deflexão da viga de Euler-Bernoulli ou digite 2 para calcular a deflexão de viga de Timoshenko: ');
if TEB~=1 && TEB~=2
    while TEB~=1 && TEB~=2
        TEB = input('Digite 1 para calcular a deflexão da viga de Euler-Bernoulli ou digite 2 para calcular a deflexão de viga de Timoshenko: ');
    endwhile
endif

fprintf('\nEscolha o tipo de apoio: \n')
TIPOAPOIO = input('Digite 1 para calcular a deflexão da viga bi-apoiada ou digite 2 para calcular a deflexão de viga engastada-livre: ');
if TIPOAPOIO~=1 && TIPOAPOIO~=2
    while TIPOAPOIO~=1 && TIPOAPOIO~=2
        TIPOAPOIO = input('Digite 1 para calcular a deflexão da viga de Euler-Bernoulli ou digite 2 para calcular a deflexão de viga de Timoshenko: ');
    endwhile
endif

fprintf('\nDigite um valor maior ou igual a 7. \n')
x = input('Discretizacao em x nos: ');
if x<7
    while x<7
        fprintf('\nDigite um valor maior ou igual a 7. \n')
        x = input('Discretizacao em x nos: ');
    endwhile
endif

fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
E = input('Digite o valor do módulo de elasticidade do material em kN^4: ');
if E<=0
    while E<=0
        fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
        E = input('Digite o valor do módulo de elasticidade do material em kN^4: ');
    endwhile
endif

fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
I = input('Digite o valor da inércia da seção transversal em m^4: ');
if I<=0
    while I<=0
        fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
        I = input('Digite o valor da inércia da seção transversal em m^4: ');
    endwhile
endif

EI = E*I;

fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
L = input('Digite o valor de L em m: ');
if L<=0
    while L<=0
        fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')

```

```

L = input('Digite o valor de L em m: ');
endwhile
endif

fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
Q = input('Digite o valor do carregamento (Q) em kN/m: ');
if Q<=0
    while Q<=0
        fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
        Q = input('Digite o valor do carregamento (Q) em kN/m: ');
    endwhile
endif

if TEB==2 %MODELO DE TIMOSHENKO
    fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
    fprintf('O valor de (k) para seções retangulares é 0.833. \n')
    k = input('Digite o valor do fator de correção ao cisalhamento (k): ');
    if k<=0
        while k<=0
            fprintf('\nO valor de (k) para seções retangulares é 0.833. \n')
            fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
            k = input('Digite o valor do fator de correção ao cisalhamento (k): ');
        endwhile
    endif

    fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
    G = input('Digite o valor do módulo de elasticidade transversal (G) em kN^4: ');
    if G<=0
        while G<=0
            fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
            G = input('Digite o valor do módulo de elasticidade transversal (G) em kN^4: ');
        endwhile
    endif

    fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
    A = input('Digite o valor da área da seção transversal em m^2: ');
    if A<=0
        while A<=0
            fprintf('\nDigite um valor maior do que 0. \n')
            A = input('Digite o valor da área da seção transversal em m^2: ');
        endwhile
    endif

    kGA = k*G*A;

endif

```

% EULER-BERNOULLI - VIGA BI-APOIADA

```
if TEB==1 && TIPOAPOIO==1
```

```
%informacoes obtidas a partir do dado de entrada
```

```
deltax = L/(x-1);
```

```
%linhas da matriz que são "diferentes" devido as condições de contorno
```

```
y1 = [5 -4 1 zeros(1,(x-5))];
```

```
y2 = [-4 6 -4 1 zeros(1,(x-6))];
```

```
yxMENOS1 = [zeros(1,(x-6)) 1 -4 6 -4];
```

```

yx = [zeros(1,(x-5)) 1 -4 5];

yMED = [1 -4 6 -4 1];

%construindo matriz coeficientes
MATRIZCOEFICIENTES = [y1;y2];
k = 0;

for i=1:(x-6)
    p = x - 5 - k - 2;
    if p<=0;
        0;
    endif
    linha = [zeros(1,k) yMED zeros(1,p)];
    MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES;linha];
    k = k + 1;
endfor

MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES;yxMENOS1;yx];

%construindo a matriz resultados
Res = Q*(deltax^4)/EI;
MATRIZRESULTADO = [Res];

for i=1:(x-3)
    MATRIZRESULTADO = [MATRIZRESULTADO;Res];
endfor

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZCOEFICIENTES\MATRIZRESULTADO;

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZDEFLEXAO*(10^3);
MATRIZDEFLEXAO = [0; MATRIZDEFLEXAO;0];

%construindo a matriz de pontos da viga

ponto1 = 0;
MATRIZPONTOS = [ponto1];

for i=1:(x-1)
    ponto1 = ponto1 + deltax;
    MATRIZPONTOS = [MATRIZPONTOS; ponto1];
endfor

plot(MATRIZPONTOS, - 1*MATRIZDEFLEXAO,'rx-', 'linewidth',2);

%solução analítica

hold on

ponto2 = 0;
ka1 = 0;
MPONTOS = [0];

for i=1:(x-1)
    ponto2 = ponto2 + deltax;
    MPONTOS = [MPONTOS;ponto2];
    ka2 = ((Q/(24*(EI)))*((ponto2^4)-2*L*(ponto2^3)+(L^3)*(ponto2)))*(10^3);
    ka1 = [ka1; ka2];
endfor

```

```
plot(MPONTOS, - 1*ka1,'bo-', 'linewidth',2)
```

%configuracoes gráfico

```
title('Viga engastada livre com carregamento distribuído - Modelo de Euler Bernoulli')
xlabel('Posição da viga (m)')
ylabel('Deslocamento (mm)')
legend('Método das diferenças finitas','Solução analítica')
grid on
axis tight
```

% EULER-BERNOULLI - VIGA ENGASTADA-LIVRE

```
elseif TEB==1 && TIPOAPOIO==2
```

%informacoes obtidas a partir do dado de entrada

```
deltax = L/(x-1);
```

%linhas da matriz que são "diferentes" devido as condições de contorno

```
y1 = [7 -4 1 zeros(1,(x-4))];
y2 = [-4 6 -4 1 zeros(1,(x-5))];
```

```
yxMENOS1 = [zeros(1,(x-5)) 1 -4 5 -2];
yx = [zeros(1,(x-4)) 2 -4 2];
```

```
yMED = [1 -4 6 -4 1];
```

%construindo matriz coeficientes

```
MATRIZCOEFICIENTES = [y1;y2];
k = 0;
```

```
for i=1:(x-5)
    p = x - 5 - k - 1;
    if p<=0;
        0;
    endif
    linha = [zeros(1,k) yMED zeros(1,p)];
    MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES;linha];
    k = k + 1;
endfor
```

```
MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES;yxMENOS1;yx];
```

%construindo a matriz resultados

```
Res = Q*(deltax^4)/EI;
MATRIZRESULTADO = [Res];
```

```
for i=1:(x-2)
    MATRIZRESULTADO = [MATRIZRESULTADO;Res];
endfor
```

```
MATRIZDEFLEXAO = MATRIZCOEFICIENTES\MATRIZRESULTADO;
MATRIZDEFLEXAO = MATRIZDEFLEXAO*(10^3); %transformando em mm
```

```
MATRIZDEFLEXAO = [0; MATRIZDEFLEXAO];
```

%construindo a matriz de pontos da viga

```
ponto1 = 0;
MATRIZPONTOS = [ponto1];
```

```

for i=1:(x-1)
    ponto1 = ponto1 + deltax;
    MATRIZPONTOS = [MATRIZPONTOS; ponto1];
endfor

plot(MATRIZPONTOS, - 1*MATRIZDEFLEXAO,'go-', 'linewidth',2)

%solução analítica
hold on

ponto2 = 0;
ka1 = 0;
MPONTOS = [0];

for i=1:(x-1)
    ponto2 = ponto2 + deltax;
    MPONTOS = [MPONTOS;ponto2];
    ka2 = ((Q/(24*(EI)))*((ponto2^4)-4*L*(ponto2^3)+6*(L^2)*(ponto2^2)))*(10^3);
    ka1 = [ka1; ka2];
endfor

plot(MPONTOS, - 1*ka1,'mo-', 'linewidth',2)

%configuracoes gráfico
title('Viga engastada livre com carregamento distribuído - Modelo de Euler Bernoulli')
xlabel('Posição da viga (m)')
ylabel('Deslocamento (mm)')
legend('Método das diferenças finitas','Solução analítica')
grid on

%TIMOSHENKO - VIGA BI-APOIADA

elseif TEB==2 && TIPOAPOIO==1

%informacoes obtidas a partir do dado de entrada
deltax = L/(x-1);

%linhas da matriz que são "diferentes" devido as condições de contorno
y1 = [1 zeros(1,(2*x-1))];
yx = [zeros(1,(2*x-2)) 1 0];

fi1 = [0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) 2*kGA*deltax 4*EI zeros(1,(2*x-4))];
fix = [zeros(1,(2*x-4)) -2*kGA*deltax 4*EI 0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI)];

y2 = [0 -deltax 4 0 -2 deltax zeros(1,(2*x-6))];
yxMENOS1 = [zeros(1,(2*x-6)) -2 -deltax 4 0 0 deltax];

fi2 = [0 2*EI 0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) kGA*deltax 2*EI zeros(1,(2*x-6))];
fixMENOS1 = [zeros(1,(2*x-6)) -kGA*deltax 2*EI 0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) 0 2*EI];

%linhas intermediárias da matriz que são iguais
yMED = [-2 -deltax 4 0 -2 deltax];
fiMED = [-kGA*deltax 2*EI 0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) kGA*deltax 2*EI];

%construindo a matriz de coeficientes
MATRIZCOEFICIENTES = [y1; fi1; y2; fi2];
pont = 2;

```



```

for i=1:(x-4)
    q = 2*x - pont - 6;
    linhaY = [zeros(1,pont) yMED zeros(1,q)];
    linhaFI = [zeros(1,pont) fiMED zeros(1,q)];
    MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES; linhaY; linhaFI];
    pont = pont + 2;
endfor

MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES; yxMENOS1; fixMENOS1; yx; fix];

%construindo matriz de resultados

Ry1 = 0;
Ryx = 0;

Rfi1 = Q*(deltax^3);
RfiX = -Q*(deltax^3);

Ry = (2*(deltax^2)/kGA)*Q;
Rfi = 0;

MATRIZRESULTADOS = [Ry1; Rfi1];

for i=1:(x-2)
    MATRIZRESULTADOS = [MATRIZRESULTADOS; Ry; Rfi];
endfor

MATRIZRESULTADOS = [MATRIZRESULTADOS; Ryx; RfiX];

%construindo a matriz final de resultados
MATRIZFINAL = MATRIZCOEFICIENTES\MATRIZRESULTADOS;

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZFINAL(1,1);
ka = 1;

for i=1:(x-1)
    ka = ka + 2;
    MATRIZDEFLEXAO = [MATRIZDEFLEXAO;MATRIZFINAL(ka,1)];
endfor

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZDEFLEXAO*(10^3);

%construindo a matriz de pontos da viga
MATRIZPONTOS = 0;
ponto1 = 0;

for i=1:(x-1)
    ponto1 = ponto1 + deltax;
    MATRIZPONTOS = [MATRIZPONTOS; ponto1];
endfor

MATRIZPONTOS;

plot(MATRIZPONTOS, - 1*MATRIZDEFLEXAO,'rx-', 'linewidth',2);

hold on

%solução analitica

```

```

ponto2 = 0;
ka1 = 0;
MPONTOS = [0];

for i=1:(x-1)
    ponto2 = ponto2 + deltax;
    MPONTOS = [MPONTOS;ponto2];
    ka2 = (((Q/(24*EI))*((ponto2^4)-2*L*(ponto2^3)+(L^3)*ponto2))+((Q/(2*kGA))*((L*ponto2)-(ponto2^2))))*(10^3);
    ka1 = [ka1; ka2];
endfor

plot(MPONTOS, - 1*ka1,'bo-', 'linewidth',2)

%configuracoes grafico
title('Viga biapoiada com carregamento distribuído - Modelo de Timoshenko')
xlabel('Posição da viga (m)')
ylabel('Deslocamento (mm)')
legend('Método das diferenças finitas','Solução analítica')
grid on
axis tight

%TIMOSHENKO - VIGA ENGASTADA-LIVRE

else TEB==2 && TIPOAPOIO==2

%informações obtidas a partir do dado de entrada
deltax = L/(x-1);

%linhas da matriz que são "diferentes" devido as condições de contorno
y1 = 0;
fi1 = 0;

y2 = [4 0 -2 deltax zeros(1,(2*x-6))];
fi2 = [0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) kGA*deltax 2*EI zeros(1,(2*x-6))];

yx = [zeros(1,(2*x-6)) -4 0 4 -4*deltax];
fix = [zeros(1,(2*x-5)) 4*EI 0 -4*EI];

%linhas intermediárias da matriz que são iguais
yMED = [-2 -deltax 4 0 -2 deltax];
fiMED = [-deltax*kGA 2*EI 0 -(kGA*2*((deltax)^2)+4*EI) deltax*kGA 2*EI];

%construindo a matriz de coeficientes
MATRIZCOEFICIENTES = [y2; fi2];
a1 = 0;

for i=1:(x-3)
    a2 = 2*x - 8 - a1;
    linhayMED = [zeros(1,a1) yMED zeros(1,a2)];
    linhafiMED = [zeros(1,a1) fiMED zeros(1,a2)];
    MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES; linhayMED; linhafiMED];
    a1 = a1 + 2;
endfor

MATRIZCOEFICIENTES = [MATRIZCOEFICIENTES; yx; fix];

%construindo matriz de resultados

```

```

Ry = [2*(deltax^2)*Q/kGA];
Rfi = 0;

MATRIZRESULTADOS = [Ry;Rfi];

for i=1:(x-2)
    MATRIZRESULTADOS = [MATRIZRESULTADOS;Ry;Rfi];
endfor

%construindo a matriz final de resultados
MATRIZFINAL = MATRIZCOEFICIENTESMATRIZRESULTADOS;

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZFINAL(1,1);
a3 = 1;

for i=1:(x-2)
    a3 = a3 + 2;
    MATRIZDEFLEXAO = [MATRIZDEFLEXAO; MATRIZFINAL(a3,1)];
endfor

MATRIZDEFLEXAO = MATRIZDEFLEXAO*(10^3);
MATRIZDEFLEXAO = [0; MATRIZDEFLEXAO];

%construindo a matriz de pontos da viga
MATRIZPONTOS = [0];
a4 = 0;

for i=1:(x-1)
    a4 = a4 + deltax;
    MATRIZPONTOS = [MATRIZPONTOS; a4];
endfor

plot(MATRIZPONTOS, - 1*MATRIZDEFLEXAO,'ro-','linewidth',2)

hold on

%solução analítica

MAPONTOS = [0];
a41 = 0;
yk = [0];

for i=1:(x-1)
    a41 = a41 + deltax;
    MAPONTOS = [MAPONTOS; a41];
    y6 = (((Q*(a41)^2)/(24*EI))*(a41^2-4*L*a41+6*L^2)-((Q/(2*kGA))*(a41^2-2*L*a41)))*(10^3);
    yk = [yk; y6];
endfor

plot(MAPONTOS, - 1*yk,'bo-','linewidth',2)

%configurações gráfico
title('Viga engastada livre com carregamento distribuído - Modelo de Timoshenko')
xlabel('Posição da viga (m)')
ylabel('Deslocamento (mm)')
legend('Método das diferenças finitas','Solução analítica')
grid on

end

```