

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO DE SANTA CATARINA - IFSC
CÂMPUS ARARANGUÁ
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA COM HABILITAÇÃO EM
FÍSICA

Murielk Sebrian Valvassore

**Modelagem de um Sistema Físico de Massa Variável
(Lançamento de um Projétil)**

Araranguá - SC
2016

Murielk Sebrian Valvassore

Modelagem de um Sistema Físico de Massa Variável (Lançamento de um Projétil)

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza com Habilitação em Física do Instituto Federal de Santa Catarina, Câmpus Araranguá, como parte das exigências para obtenção do título de Licenciado em Ciências da Natureza com Habilitação em Física.

Orientador: Me. Mateus Medeiros Teixeira

Araranguá - SC
2016

Resumo

Este trabalho tem o intuito de apresentar a relação entre a Física e a Matemática a partir do estudo da modelagem de um fenômeno físico. Pois os modelos matemáticos apresentam uma série de parâmetros e aspectos úteis, pois além de apresentar uma linguagem concisa, que pode vir a facilitar sua manipulação, permitem ainda à possibilidade de analisar hipóteses e prever o comportamento de um sistema sob diversas condições.

O fenômeno analisado é lançamento de garrafas PET, que se trata de um modelo de foguete caseiro, construído utilizando garrafas descartáveis de refrigerante, água, entre outros e sua propulsão funciona através de uma combinação de água e pressão (ar comprimido). O mesmo permite explorar diversos conceitos físicos e matemáticos, além de ser um ótimo material para o desenvolvimento de competências para a pesquisa e leitura de textos científicos, aprimorando habilidades como observação, coleta de dados, interpretação, construção e investigação, podendo promover ambientes de aprendizagem não convencionais.

Palavras Chave: Modelagem, Foguetes, Sistema de Massa Variável, Equação do Foguete.

Sumário

Introdução	5
1 Os Primeiros Foguetes	9
1.1 Aspectos Históricos	9
1.2 Princípio de Funcionamento dos Foguetes	14
1.3 Foguetes de Garrafa PET	15
2 Conceitos Básicos	17
2.1 Dinâmica	17
2.2 Hidrodinâmica	19
3 Aplicações no Foguete	21
3.1 Forças aplicadas no foguete	21
4 Modelagem	24
4.1 Sistema Físico de Massa Variável	24
Considerações Finais	36
Referências	38

Introdução

Desde a antiguidade, a Matemática e a Física são universos interligados, arrisca-se a dizer inclusive que a Matemática é a linguagem da Física, conforme evidenciamos em diversos escritos, como o de Galileu Galilei, que diz “a Natureza está escrita em caracteres Matemáticos”, ou ainda Francis Bacon, “à medida que a Física avança cada vez mais e desenvolvem novos axiomas, ela exige uma ajuda pronta da Matemática”.¹

Ainda temos exemplos de Arquimedes, Ptolomeu, Newton, entre outros grandes cientistas que ao longo de seus trabalhos fizeram tanto a Física quanto a Matemática andassem juntas, desde teoremas geométricos ao surgimento do cálculo diferencial.

Um excelente exemplo dessa interação é a modelagem físico-matemática. Modelar um problema físico significa criar um modelo que explique as características de funcionamento e comportamento do mesmo. No âmbito científico, os modelos matemáticos apresentam uma série de parâmetros e aspectos úteis, pois além de apresentar uma linguagem concisa, que pode vir a facilitar sua manipulação, permitem ainda à possibilidade de analisar hipóteses e prever o comportamento de um sistema sob diversas condições.²

“A modelagem, mais do que ferramenta útil para resolução de problemas, pode contribuir de forma significativa para uma visão de ciência adequada à prática científica moderna, cuja essência está na criação de modelos.”(BRANDÃO; ARAUJO; VEIT, 2008, p. 11).

Contudo, quanto maior a proximidade de um modelo com a realidade, mais complexo ele se torna, ou seja, significa um elevado número de parâmetros e consequentemente um maior grau de dificuldade para obtenção de dados e interpretação do mesmo. Por exemplo, sistemas físicos nos quais temos variáveis do sistema dependendo de uma variável livre ou mais, como problemas influenciados pela posição e pelo tempo, que em geral, dão origem a equações diferenciais ordinárias ou parciais (EDO's e EDP's, respectivamente).

De acordo com o sistema determinado e condições iniciais fixadas, as soluções das EDOs ou EDPs representam as possíveis trajetórias que o sistema pode assumir, assim quanto maior rigor na formulação das equações (considerando todos os fatores influentes do sistema físico abordado), melhor será a previsão do comportamento do sistema. Em casos como lançamento de veículos espaciais, satélites ou sondas,

¹FIOLHAIS, Carlos . **A matemática vista pelas outras ciências**. Disponível em:<http://www.mat.uc.pt/lnv/debate2/CarlosFiolhais.html>. Acesso em Abril de 2015.

²BATISTA, Eliezer; MOZOLEVSKI, Igor. **Métodos de Física-Matemática**, Florianópolis, UFSC, 2010. cap. 2, p. 61.

é necessário cuidado minucioso das expressões formuladas, pois o menor erro pode implicar em perdas consideráveis.

Neste trabalho, analisaremos a integração que ocorre entre a física e a matemática no lançamento de foguetes de garrafas PET, que trata-se de um modelo de foguete caseiro, construído utilizando garrafas descartáveis de refrigerante, água, entre outros e sua propulsão funciona através de uma combinação de água e pressão (ar comprimido).

Escolhemos esse exemplo primeiramente por conta do histórico que o IFSC-Câmpus Araranguá tem com o mesmo. Uma vez que durante a realização da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, o grupo PIBID-IFSC promove a alguns anos um campeonato de lançamento de foguetes de garrafas PET.

A proposta do campeonato é despertar a curiosidade dos alunos sobre a física. Quando se aproxima a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, durante as atividades do grupo do PIBID nas Escolas de Educação Básica de Araranguá e região, são ofertadas aos alunos do ensino médio oficinas sobre os fundamentos teóricos e práticos para a construção dos foguetes.

Nas oficinas os participantes podem confeccionar seus foguetes e posteriormente participam na sua escola de uma etapa eliminatória, os melhores colocados de cada escola, ou seja, os foguetes que alcançaram a maior distância, participam da etapa final na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, onde as três maiores distância são premiadas.

Além disso, este exemplo aborda um problema de massa variável, uma vez que neste tipo de projétil podemos observar que ao longo da trajetória, o “combustível” que proporciona o movimento do foguete é consumido reduzindo a massa total durante a variação de posição do movimento realizado pelo foguete.

Neste sentido, do ponto de vista físico podemos explorar conceitos abordados em mecânica, como movimento ao longo de trajetórias (movimento oblíquo), em que notamos a ação ocorrendo tanto verticalmente quanto horizontalmente. Podemos abordar neste mesmo instante também a interação das forças, por exemplo, a força gravitacional e a força de resistência dinâmica (força de arrasto), que estão presentes no meio ao qual o projétil é lançado.

Podemos pensar também na questão dos fluidos através do estudo da hidrodinâmica, envolvendo os conceitos de pressão e velocidade de escoamento, correlacionando com a segunda lei de Newton, o que nos resulta na propulsão dos foguetes. Destacamos que sistemas como o de lançamento de projéteis, nos permitem aprofundar conceitos mais complexos de física, pouco enfatizado no ensino médio, como os princípios de conservação de momento e energia.

Do ponto de vista matemático, podemos abordar conceitos como geometria (escolha dos sistemas de coordenadas), funções polinomiais, cônicas e além disso, aprofundando no desenvolvimento dos modelos, para descrever o movimento real, podemos fazer uso do cálculo diferencial, abordando técnicas de equações diferenciais. Podem-se explorar também as conexões com modelos computacionais, no uso de simulações comparando os modelos teóricos e práticos.

Além destes pontos, podemos considerar o estudo do lançamento de foguetes como um ótimo material para o desenvolvimento de competências para a pesquisa e leitura de textos científicos, aprimorando habilidades como observação, coleta de dados, interpretação, construção e investigação, visto que a partir de um modelo teórico, como o que disponibilizaremos, o docente pode trabalhar a construção e lançamento de protótipos com seus alunos e discutir os resultados obtidos com os mesmos, promovendo assim ambientes de aprendizagem não convencionais.

Fazendo uma pesquisa de trabalhos em publicações da Sociedade Brasileira de Física e revistas de ensino de física como a revista Brasileira de Física, entre outras, encontramos 10 trabalhos envolvendo o lançamento de foguetes de garrafas PET, conforme pode ser visto na tabela abaixo.

Tabela 1: Publicações sobre o Lançamento de Foguetes de Garrafas PET.

Revistas e Eventos	Artigos	Data
Física na Escola	Um Foguete de Garrafas PET.	2007
V Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”	Ensino de Física em Espaços Informais: Uma Experiência com Lançamento de Foguetes de Garrafa PET.	2011
III Encontro Científico e Simpósio de Educação Unisalesiano	Foguetes de Garrafa PET.	2011
PUC-Minas Gerais: Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática	Uso do Foguete de Água no Ensino de Hidrodinâmica em Física Geral.	2012
II Seminário de Socialização do PIBID-UNIFAL-MG	Competição de Lançamento de Foguetes: Uma Proposta para o Ensino de Física	2012
Jornada de Pesquisa e Extensão	Foguete de Garrafa PET	2013

XLI Congresso Brasileiro de Educação e Engenharia	Projeto Interdisciplinar: Foguete a Propulsão de Água e Pressão de Ar.	2013
V-EEEFis-RS, Porto Alegre	Contextualizando a Terceira Lei de Newton com Garrafa PET.	2013
V-EEEFis-RS, Porto Alegre	Uma Sequência Didática Relacionando Aplicações da Astronomia com CTS para o Estudo de Movimentos em Física.	2013
SBM-Sociedade Brasileira de Matemática	Uma Contribuição ao Ensino-Aprendizagem da Matemática na Educação Básica: Aplicação das Funções Quadráticas no Lançamento de Foguetes Confeccionados com Garrafas PET.	2014

Fonte: Elaborado pelo autor.

Estes trabalhos, em geral, exploram o estudo experimental (da construção ao lançamento do foguete de garrafas PET), priorizando a proposta de abordagens didáticas diferenciadas para o ensino-aprendizagem, tanto da física quanto da matemática, para a educação básica.

Capítulo 1

Os Primeiros Foguetes

1.1 Aspectos Históricos

Os primeiros foguetes que se tem ideia eram de origem oriental e surgiram com os chineses, sua construção tinham como base tubos de bambu cheios de pólvora e eram utilizados em festividades religiosas¹. Posteriormente, os chineses acabaram descobrindo que os tubos contendo pólvora poderiam servir de propulsor para outros objetos, essa propulsão ocorreria por conta dos gases liberados pela reação química. Dados históricos afirmam que no século XIII, o exército chinês amarrava flechas aos bambus com pólvora e lançavam em direção aos inimigos.

Anos mais tarde, os árabes utilizaram este método chinês em suas invasões, o que fez com que os povos do ocidente conhecessem esta arma bélica. Com isso, estes instrumentos passaram a fazer parte dos arsenais europeus, como Itália, Alemanha e posteriormente Inglaterra. E foram importantes instrumentos de guerra, até tornarem-se obsoletos, sendo substituídos por armas de fogo e canhões.

Após a virada do século XIX e principalmente no período da guerra fria, quando iniciou-se fortemente a corrida para o espaço, surgiram os primeiros estudos da utilização dos foguetes como propulsor para as naves espaciais e posteriormente satélites. Neste período podemos destacar dois nomes, o engenheiro alemão Wernher Von Braun e o físico estadunidense Robert Hutchings Goddard, foram eles que desenvolveram os primeiros protótipos a serem impulsionados por combustível líquido.²

Goddard foi um visionário, no início do século XX, enquanto mentes brilhantes se preparavam para explorar os céus, elaborando as primeiras invenções que funda-

¹HAMILTON, Calvin J. **Uma breve historia dos foguetes**. Disponível em: <http://solarviews.com/portug/rocket.htm>. Acesso em: Agosto de 2015.

²PÓRTO, Cleovam da Silva. **Os Foguetes: História e Desenvolvimento**. UnB, 2010. Disponível em: https://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/os-foguetes-ii_revisado.pdf. Acesso em: Agosto de 2015.

mentariam a linha cronológica da história de formação dos aviões, Goddard pensava em explorar as fronteiras do espaço, publicou um jornal com o título “A Method of Reaching Extreme Altitudes” de 1919, no qual inseriu as suas ideias dos primeiros foguetes, impulsionados por combustível líquido.

Em 1926, o primeiro foguete com combustível líquido, uma mistura de petróleo e oxigênio líquido, foi lançado por Goddard alcançando um voo de 46 metros, porém seus trabalhos não tiveram o reconhecimento esperado, na época. Mesmo assim ele não desistiu de suas pesquisas no estado do Novo México continuando a desenvolvê-las no períodos de 1930 à 1942 registrando mais de 200 patentes, até sua morte em 1945.

Figura 1.1: Robert Goddard e seu protótipo em 1926.



Fonte: NASA, 2015.³

Foi neste período que o nome de Wernher Von Braun ficou conhecido, ao ser um dos principais nomes no desenvolvimento do foguete V-2 (Vengeance-2), além das tecnologias (de foguetes) patrocinadas pela Alemanha Nazista e utilizadas nos períodos finais do conflito. Posteriormente ao término da segunda guerra, ele tornou-se um dos pioneiros na corrida espacial, liderando um projeto aeroespacial americano, responsável pela fabricação do primeiro foguete de grande porte movido a combustível líquido. Futuramente o desenrolar deste trabalho daria origem ao foguete Saturno V, responsável por impulsionar a nave Apollo que levou os astronautas dos E.U.A à Lua em 1969.

³NASA, Dr. Robert H. Goddard, American Rocketry Pioneer, Disponível em: <http://www.nasa.gov/centers/goddard/about/history/dr_goddard.html>. Acesso em: Agosto de 2015.

Figura 1.2: Wernher von Braun no Centro Espacial Marshall em 1964.



Fonte: NASA, 2015.⁴

A tabela abaixo apresenta resumidamente a linha cronológica da evolução dos foguetes.

Tabela 1.1: Evolução dos Foguetes.

Ano	Modelo	Utilização
1200	Tubos de Bambus cheios de pólvora.	Utilizado pelos chineses como fogos de artifício e posteriormente para fins militares, como a batalha de Kai-keng.
1670-1730	Protótipo desenvolvido pelo engenheiro de balística William Congreve, os quais empregou tubos de lançamento para melhorar a precisão.	A marinha britânica usou para bombardear alvos durante a guerra napoleônica.
1882-1930	O norte-americano Robert Goddard, pioneiro no desenvolvimento de foguetes movidos com combustível líquido.	Em 1920 conseguiu lançar seu primeiro protótipo, que alcançou 12 metros de altura.

⁴NASA, 100 Years of Possibility: Celebrating the Centennial Birthday of Dr. Wernher von Braun. Disponível em: <<http://www.nasa.gov/topics/history/features/vonbraun.html>> Acesso em: Agosto de 2015.

1944	Foguete V2.	Criado para fins militares pelo exército alemão para atacar a Inglaterra no fim da Segunda Guerra mundial.
1945	Wac Corporal.	Primeiro foguete americano utilizado para pesquisa científica, no campo de estudos meteorológicos.
1957	R-7.	Primeiro foguete feito pelos soviéticos, responsável por colocar o Sputnik em órbita.
1959	R-7 8K72 ou SS-6 Sapwood.	Foguete soviético que impulsionou a primeira sonda a atingir a Lua.
1961	Vostok 1.	Foguete desenvolvido também pelos soviéticos que marcou a história ao impulsionar a espaçonave com Yuri Gagarin, o primeiro homem a ir ao espaço, em um voo que durou uma hora e quarenta e oito minutos.
1962	Atlas-Agena.	Foguete responsável por enviar sondas a Lua e a primeira espaçonave a chegar a outro planeta (Vênus).
1969	Saturno V.	Principal foguete que marcou história, contendo 2,8 milhões de Kg e 111m, responsável pelo lançamento de todas as missões tripuladas à Lua, assim como da Apollo 11.
1969	N1.	Foguete desenvolvido pelos soviéticos para bater os americanos na corrida até a Lua que terminou em testes desastrosos tanto em 1969 quanto em 1972.
1981	Ônibus Espacial.	Após a corrida espacial, o objetivo da NASA foi desenvolver foguetes reaproveitáveis, que até então viravam lixo espacial ou eram desintegrados na reentrada.
1988	Buran.	Criado pela União Soviética como resposta ao ônibus espacial realizou seu primeiro e único voo em 1988, depois disso o programa espacial soviético foi cancelado por falta de recursos.
Atualidade	Ariane 5 ECA.	Utilizado pela Agência Espacial Europeia (ESA) para transportar carga ao espaço.

Atualidade	Souyz.	Foguete russo que atualmente é o único capaz de levar astronautas à Estação Espacial Internacional (ISS).
Atualidade	Atlas V.	Foguete que contém cinco modelos diferentes usados pela NASA para transportar carga e sondas ao espaço, como a Curiosity enviada a Marte.
Atualidade	LM-3A.	Protótipo Chinês, com capacidade de levar uma carga de até 2,6 toneladas, já participou de 16 missões de sucesso.
Atualidade	H2B.	Desenvolvido pelo Japão com tecnologia própria é um veículo com grande possibilidade de participar de futuras missões, incluindo o transporte de carga para a ISS.
Atualidade	Vega.	Lançador desenvolvido pela União Europeia com o propósito de transportar carga e satélites ao espaço.

Fonte: Notícias Terra, 2016.⁵

⁵ **A evolução dos foguetes.** Disponível em: <http://noticias.terra.com.br/ciencia/espaco/evolucao-foguetes/>. Acesso em: Março de 2016.

1.2 Princípio de Funcionamento dos Foguetes

O princípio básico do funcionamento do foguete se fundamenta na Terceira Lei de Newton, dada como o princípio da ação e reação que nos diz:

“Quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo e de sentido contrário, à força sobre a outra”.
(ALONSO; FINN, 2009, p. 154.)

Para melhor entendermos isso, devemos compreender que a interação do material contido dentro do foguete (que pode ser de natureza química ou física) gera uma ação ao escapar pela única abertura disponível do recipiente “tanque” do foguete, impulsionando o mesmo para o lado oposto desta ação. Outro exemplo similar, consiste nos balões movidos a ar. Ao permitir que o ar escape, temos uma ação, que em contrapartida, gera uma reação, de mesma intensidade e de sentido oposto que é responsável por fazer o balão voar.

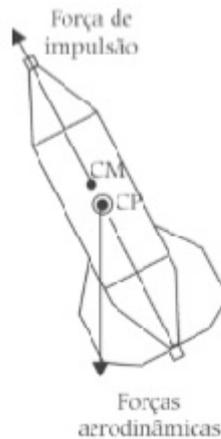
Porém, além de colocarmos o foguete em movimento desejamos que o mesmo siga uma trajetória esperada e para que isso aconteça ele necessita ter estabilidade, capacidade que depende de dois pontos importantes: centro de massa e centro de pressão.

O centro de massa (CM) é o ponto onde se supõe concentrada toda a massa do sistema. O conceito é utilizado para análises físicas nas quais não é importante considerar a distribuição de massa, mas sim a massa total em um ponto de equilíbrio, como por exemplo, as órbitas dos planetas.

Já o Centro de Pressão (CP) é o ponto onde age a resultante das forças aerodinâmicas envolvidas. Portanto, para que o foguete mantenha sua estabilidade e trajetória é necessário que o centro de pressão (CP) no protótipo localize-se logo abaixo do centro de massa (CM). Neste sentido vemos que, o centro de massa do foguete deve ser localizado próximo à ponta (“nariz”) do protótipo, para que mesmo ao sofrer turbulências que gerem forças laterais, permaneça em sua trajetória estabilizada. Isso acontece porque quando o foguete voa, existe maior pressão na parte de baixo (abaixo do centro de massa) do que na parte superior (acima do centro de massa), com isso a pressão do ar manterá a parte de baixo e de cima estabilizadas, não permitindo que o foguete inverta.

Indicamos o canal online NASA Spacelink, para maiores informações na questão de estabilidades dos foguetes. Também é possível realizar teste verificativos neste site.

Figura 1.3: Demonstração das posições entre o CM e CP.



Fonte: SOUZA, 2007, p. 8.

1.3 Foguetes de Garrafa PET

Trata-se de um modelo de foguete caseiro, construído utilizando garrafas PET (garrafas descartáveis de refrigerante, água, entre outros) e sua propulsão funciona através de uma combinação de água e pressão (ar comprimido).⁶

Para o modelo mais simples de ser construído são utilizadas duas garrafas descartáveis de refrigerante de dois litros. As duas garrafas PET são as principais peças para construção do foguete, pois compõe sua estrutura, que é composta pela câmara de compressão e a parte frontal do foguete.

A câmara de compressão é a região em que estará contido o combustível (água) e o ar comprimido no momento da propulsão, logo para esta parte é utilizada uma garrafa inteira sem alteração. Para a parte frontal (nariz) apenas a parte cônica (parte de cima) da garrafa é usada, ela é fixada no fundo da outra garrafa e tem a função de minimizar o atrito com o ar durante o movimento, dando ao foguete um formato aerodinâmico.

Além disso, as aletas também são fundamentais para o foguete, pois auxiliam na sua estabilidade durante o voo, para sua construção pode ser utilizadas pastas de plástico ou papelão. O formato das aletas é arbitrário, geralmente utiliza-se a forma do trapézio retângulo, as aletas devem ser fixadas na parte cônica da garrafa inteira, ou seja, do lado oposto ao nariz.

Com a garrafa utilizada para fazer a parte frontal do foguete, antes de descartá-la, pode ser cortado seu fundo, sobrando sua parte do meio (cilíndrica), esta pode ser conectada com a parte cônica da garrafa inteira, assim sendo, uma maneira de facilitar o processo de adição das aletas ao foguete. Abaixo segue a imagem de um

⁶Para a construção deste foguete podem ser utilizados diversos tipos de materiais, não somente os aqui citados, variando conforme a vontade do construtor.

modelo construido com o método acima.

Figura 1.4: Modelo de Foguete de Garrafas PET.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Dinâmica

A Dinâmica é o ramo da física que se preocupa em estudar as causas que atuam ou provocam o movimento de um objeto ou partícula.

Quando se estuda este ramo da física, um importante nome deve ser lembrado, o de Sir Isaac Newton, responsável por relacionar dois conceitos chaves, força e aceleração.

Primeiramente, devemos entender que não se define “força”, a sua conceituação resulta de uma série de observações da natureza que permitem determiná-la. Porém, existe uma condição necessária para existir Força, é quando ocorre a interação entre um par de corpos, por exemplo, um satélite girando ao redor da Terra.

Este estado inicial em que o corpo se encontra e chamado de inércia e é entendido como o estado em que o corpo tende a se manter quando não sofre ação externa, ou seja, em equilíbrio com o meio em que se encontra, podendo este estar parado ou em movimento desde que a velocidade seja constante.

Assim, partindo da observação do estado de equilíbrio em que os corpos se encontram, Newton formulou as três leis que regem o principio da Dinâmica, sendo a primeira lei conhecida como lei da inércia, que pode ser enunciada assim:

“Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento uniforme retilíneo , a menos que uma força externa atuem sobre ele, alterando seu estado”.(SILVA; BARRETO, 2010, p. 169.)

Observe que, o movimento de um corpo é relativo a um observador, uma vez que um referencial é um corpo escolhido como referência, ou seja, em relação ao qual serão analisadas as situações (posição, velocidade,etc.) dos outros corpos. Qualquer corpo livre da ação de forças, nos termos da primeira lei de Newton (lei da inércia) é chamado de referencial inercial.

A segunda lei de Newton define diretamente a relação entre força e aceleração e diz,

“Quando um corpo é submetido a uma ação de forças e a resultante delas não é nula, ele adquire uma aceleração \vec{a} , cuja direção e sentido são os mesmos da força resultante (\vec{F}_R) ”. (SILVA; BARRETO, 2010, p. 173.)

Com base na primeira lei, qualquer variação na velocidade de um corpo em relação a um referencial inercial (referencial para o qual as leis da inércia são válidas) está sempre associada à ação de uma força não nula. Então quando a resultante das forças é não nula a velocidade sofrerá variações, ou seja, o efeito da aplicação da força resultante provoca uma aceleração no corpo ao qual está aplicada.¹

Em termos matemáticos a equação geral da segunda lei é expressa como:

$$\vec{F}_R = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (2.1)$$

Esta lei, conforme apresentada, tem validade geral, contudo para sistemas em que a massa é constante, temos:

$$\vec{F}_R = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.2)$$

Ainda, lembrando que aceleração é o resultado da derivação da velocidade ou derivada segunda da posição, ambas em relação ao tempo, a equação acima pode ser reescrita por:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \quad (2.3)$$

Por fim, a terceira lei, chamada lei da ação e reação diz o seguinte:

“Quando duas partículas interagem, a força sobre uma partícula é igual em módulo e de sentido contrário, à força sobre a outra”. (ALONSO; FINN, 2009, p. 154.)

Ou seja, durante a interação entre dois corpos, cada um exerce uma força sobre o outro. O que define se entre eles ocorre movimento, será o momento de inércia de cada corpo e se sobre eles não se aplica nenhuma outra força. Por exemplo, quando se empurra um carro, a força aplicada no carro gera uma força de reação de mesma intensidade, porém com o sentido oposto no corpo de quem empurra, durante esta interação entre a pessoa e o carro, na pessoa, também se tem a interação de outra força, conhecida como força de atrito, com intensidade similar a força de reação gerada no momento em que se empurra o carro, sendo assim, a pessoa não se movimenta.

¹Lembrando que todas as grandezas até então comentadas, com exceção do tempo e da massa, são grandezas vetoriais, isso quer dizer, possuem módulo, direção e sentido, por consequência, se um corpo está sob ação de várias forças, o resultado da soma vetorial delas é definido como força resultante.

No carro também se encontra a força de atrito, porém a intensidade desta é menor no carro devido suas rodas, assim a resultante da interação da força provocada pelo empurrão com o atrito gera a locomoção do automóvel.

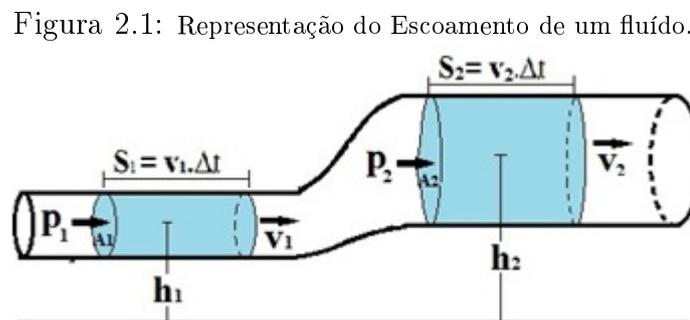
2.2 Hidrodinâmica

A hidrodinâmica é a parte da física responsável pelo estudo do comportamento de fluidos (líquidos e gases) em movimento, que pode ocorrer de modo que a velocidade do fluido varie.

Para casos como o foguete de garrafa PET, analisando a parte interna do foguete, temos o estudo do fluido interno, ou seja, a água (fluido líquido) na qual sua velocidade de escoamento é um dos fatores que influencia na velocidade do foguete, pois está será a propulsão para que o mesmo entre em movimento.

A equação de Bernoulli, válida para escoamento laminar de um fluido incompressível, influenciará na equação final para o modelo proposto, descrevendo o comportamento de um fluido que se move ao longo de um tubo ou conduto.

Para a demonstração da obtenção da equação de Bernoulli, vamos partir do Teorema Trabalho-Energia, observando a figura a seguir:



Fonte: Mundo Educação, 2015.²

Os fatores que interferem no escoamento do fluido são a diferença de pressão nas extremidades do tubo, a área de seção transversal e a altura.

Como o líquido está em movimento a uma determinada altura, durante o transporte do ponto um ao ponto dois ocorre a variação da energia cinética e potencial, devido ao trabalho realizado pelas forças que atuam no sistema, ou seja, as forças de pressão e gravitacional.

²MUNDO EDUCAÇÃO, **Equação de Bernoulli**. Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/equacao-bernoulli.htm>>. Acesso em: Maio de 2015.

Assim pelo teorema do Trabalho-Energia, podemos escrever:

$$\Delta W = \Delta E_{pg} + \Delta E_c$$

Em que $\Delta W = W_{F_1} - W_{F_2}$; $W = F \cdot S$, assim sendo:

$$F_2 \cdot S_2 - F_1 \cdot S_1 = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \quad (2.4)$$

Visto que, F o módulo da força nos pontos um e dois, S representa o comprimento das colunas de água, h é a altura de cada ponto do sistema e v é a velocidade de escoamento do fluido.

Sabendo que $m = \rho \cdot V$, onde ρ é a densidade do fluido e V é o volume ocupado e que $F = P \cdot A$, novamente, F é o módulo da força, P a pressão aplicada e A área de contato, substituindo estes termos na equação (2.4).

$$\begin{aligned} P_2 \cdot A_2 \cdot S_2 - P_1 \cdot A_1 \cdot S_1 &= \rho \cdot V \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{\rho \cdot V}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\ \xrightarrow{A \cdot S = V} P_2 \cdot V - P_1 \cdot V &= \rho \cdot V \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{\rho \cdot V}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\ \Rightarrow (P_2 - P_1) \cdot V &= \left[\rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \right] \cdot V \\ \Rightarrow P_2 - P_1 &= \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\ \Rightarrow P_2 - P_1 &= -\rho \cdot g \cdot h_1 + \rho \cdot g \cdot h_2 - \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \\ \Rightarrow P_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} &= P_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

A expressão obtida é conhecida como equação de Bernoulli, a qual ainda pode transcrever para um caso particular para quando as alturas são iguais, $h_1 = h_2$ assim:

$$P_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \quad (2.6)$$

Analisando a equação acima, para o estado final do sistema podemos concluir que: “Se a velocidade de um fluido aumenta enquanto ele se move horizontalmente ao longo de uma linha de fluxo, a pressão do fluido diminui, e vice-versa.” (HALLIDAY, 2009, p. 73.)

Capítulo 3

Aplicações no Foguete

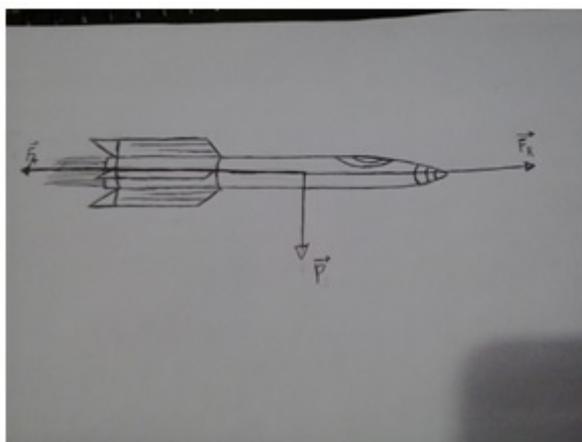
3.1 Forças aplicadas no foguete

Todo projétil na terra, seja ele um avião, uma bala de canhão ou foguete, sofre a interação, ou melhor, a ação de forças externas durante o período de sua trajetória, o que conseqüentemente influencia seu movimento.

Forças que podemos citar como exemplo, a força de atração gravitacional da terra, a qual atrai todos os corpos para o centro da Terra. Também não podemos esquecer o ar, meio no qual geralmente estes projéteis são lançados, que interferem tanto na velocidade como na posição da trajetória.

Na figura a seguir, demonstramos um esboço, da interação das forças que atuam sobre o foguete em determinado instante do movimento. Podemos observar a ação da força gravitacional, representada por \vec{P} , a resultante das forças de impulsão \vec{F}_R , que proporciona o movimento do foguete e ainda a força de resistência do ar \vec{F}_A atuando contra o movimento.

Figura 3.1: Esboço da interação das Forças no projétil.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma força importante a ser frisada, trata-se da força de resistência dinâmica, ou seja, uma determinada força que atua contra o movimento. Para casos específicos, como o lançamento do foguete, por exemplo, que se encontra em meio ao ar, o qual é denominado como um fluido, desta forma depara-se como resistência à chamada força de resistência do fluido, pois o projétil se desloca com certa velocidade sobre o mesmo.

Ainda a força de resistência do fluido, pode ser denominada como força de arrasto, representada pela equação:

$$F = K_n \cdot V^n$$

em que K é uma constante que depende das propriedades físicas do fluido.

Novamente, para lembrar, o foguete encontra-se em movimento no ar, com isso, deverão a partir deste momento considerações a serem feitas, quando estudamos a mecânica dos fluidos, em meios como a água e o ar, as Leis de Newton para a dinâmica também são válidas, os quais são conhecidos também como fluidos Newtonianos.

Portanto, para o movimento de um corpo sobre a influência de um fluido, neste caso o ar, o movimento tiver a velocidade constante, com módulo não muito pequeno, o módulo da força de arrasto é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade do corpo, assim sendo, o valor de n , para a equação acima valerá dois, ou seja:

$$F = K_2 \cdot V^2$$

Como K_2 depende das propriedades físicas atribuídas para o fluido Newtoniano, ou seja, o ar, obtém-se $K_2 = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot A$, em que ρ é a densidade do fluido, A representa a área de contato do corpo e C_x é o coeficiente de arrasto.

Para determinação do coeficiente de arrasto, a mecânica de fluidos faz uso do número de Reynolds, um número adimensional obtido pelo resultado de estudos do físico e Osborne Reynolds, assim temos a equação do coeficiente de arrasto que é dada pela função do número de Reynolds.

$$\begin{aligned} C_x &= f(R_e) \\ R_e &= \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \end{aligned} \quad (3.1)$$

A expressão do número de Reynolds resulta de um quociente entre a inércia $\rho \cdot v$ e a força de viscosidade $\frac{\mu}{D}$, onde ρ é a densidade do fluido, v é a velocidade média do fluido, D é a longitude do fluxo e μ o valor da viscosidade dinâmica do fluido.

Para os valores da viscosidade dinâmica do fluido, segue a tabela a retirada da

apostila “Fluídos Reais e Ideais” da Universidade Federal de Santa Maria.

Tabela 3.1: Valores da Viscosidade Dinâmica.

Fase	Substância	μ (P)
Líquido	Glicerina (20 °C)	8,3
	Água (0 °C)	$1,8 \times 10^{-2}$
	Água (100 °C)	$2,8 \times 10^{-3}$
	Éter (20 °C)	$1,2 \times 10^{-2}$
	Mercúrio (20 °C)	$1,5 \times 10^{-2}$
	Ar (- 192 °C)	$1,7 \times 10^{-3}$
Gás	Hidrogênio (15 °C)	$8,9 \times 10^{-5}$
	Ar (0 °C)	$1,7 \times 10^{-4}$
	Ar (20 °C)	$1,8 \times 10^{-4}$
	Ar (100 °C)	$2,2 \times 10^{-4}$
	Água (100 °C)	$1,3 \times 10^{-4}$
	CO ₂ (15 °C)	$1,4 \times 10^{-4}$

Fonte: Grupo de Ensino de Física. Fluidos Reais e Ideais, UFSM. 2010.

Portanto a equação que expressa a força de arrasto, ou seja, força de resistência do fluido será:

$$F = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot A \cdot V^2 \quad (3.2)$$

Capítulo 4

Modelagem

4.1 Sistema Físico de Massa Variável

Primordialmente, entende-se como um sistema físico, um conjunto ou agregado de objetos, partículas, substância ou matéria os quais existem um vínculo ou interação, caracterizado por ter uma localização no espaço-tempo e ter um estado físico sujeito a evolução temporal.

Para um sistema físico de massa variável, pode-se entender como aquele ao qual o objeto ou material ao decorrer do tempo em que o mesmo se movimenta durante uma trajetória (espaço-tempo), sua massa sofre uma variação a medida em que o tempo varia, como por exemplo, um carro que durante o percurso vai consumindo seu combustível, ou um avião durante sua rota de voo.

Em ambos os casos o peso total dos objetos não é o mesmo, pois o tanque de combustível, ao longo da trajetória, não tem a mesma massa do ponto de partida, pois o combustível contido no tanque foi consumido para que, tanto o automóvel, quanto a aeronave, pudessem se locomover.

Assim, o modelo a ser elaborado e estudado neste trabalho tem como ponto de início a dedução da equação para o sistema físico de massa variável que será o molde ao qual anexando às deduções anteriormente desenvolvidas, resulta no desenrolar final deste trabalho.

Logo, o foguete é um bom exemplo de um sistema físico de massa variável, pois para que ele possa se movimentar, ocorre à descarga do combustível ou material utilizado para seu funcionamento, como no de garrafa pet, geralmente utilizado com água, por conseguinte variando a massa antes do lançamento com a massa no final do trajeto.

Como dito anteriormente a impulsão do foguete resulta de uma força de sentido contrario da ação de escape do liquido pela abertura disponível na garrafa PET, assim

sendo observamos a terceira lei de Newton.

Agora, imaginamos um foguete de massa m com velocidade v em um certo instante de tempo t , o momento linear do sistema (quantidade de movimento), neste instante t é, então dado por:

$$p = m \cdot v$$

$$\stackrel{t=0}{\Rightarrow} \vec{p}_i = m \cdot \vec{v}$$

Após determinado intervalo de tempo dt , dado a vazão do líquido, o foguete agora está viajando com velocidade $\vec{v} + d\vec{v}$ e possui massa $m - dm$, em que a variação de massa dm é uma quantidade negativa. Em relação ao solo durante o intervalo de tempo dt o fluido é expelido com velocidade \vec{U} e variação de massa dm , mediante a estes fatores, a quantidade de movimento final será:

$$\vec{p}_f = dm \cdot \vec{U} + (m - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) \quad (4.1)$$

Podemos simplificar a equação acima usando a velocidade \vec{v}_e ¹, que é a velocidade de escape do fluido em relação ao foguete. Para obter \vec{v}_e na equação, subtraímos a velocidade \vec{U} da velocidade do foguete $(\vec{v} + d\vec{v})$ no intervalo dt .

$$\vec{v}_e = (\vec{v} + d\vec{v}) - \vec{U}$$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{v} + d\vec{v} - \vec{v}_e$$

$$\Rightarrow \vec{p}_f = dm \cdot (\vec{v} + d\vec{v} - \vec{v}_e) + (m - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v})$$

$$\Rightarrow \vec{p}_f = dm \cdot \vec{v} + dm \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{v}_e + m \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{v} - dm \cdot d\vec{v} \quad (4.2)$$

Simplificando a expressão acima e da relação com a variação da quantidade de movimento ($d\vec{p}$), obtemos:

$$d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -dm \cdot \vec{v}_e + m \cdot \vec{v} + m \cdot d\vec{v} - m \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}_e \quad (4.3)$$

Em que podemos reescrever $\frac{dm}{dt}$ (a taxa com que o foguete perde massa) por R . Supondo que a vazão do líquido expressa por $R = \frac{dm}{dt}$ é constante, a massa m do

¹Lembrando que a velocidade de escape é dada pela equação de Bernoulli, adotada para o modelo aqui apresentado, tal que: $v_e = v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (P_1 - P_2) + 2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}$

foguete no instante t valerá $m = m_0 - R \cdot t$. Onde m_0 é a soma da carga útil mais o “combustível”.

Ainda, a equação anteriormente obtida, pode ser reescrita a partir das relações $\left(\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$ e $\left(\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}\right)$, expressões equivalentes da segunda lei de Newton aplicada ao movimento, logo:

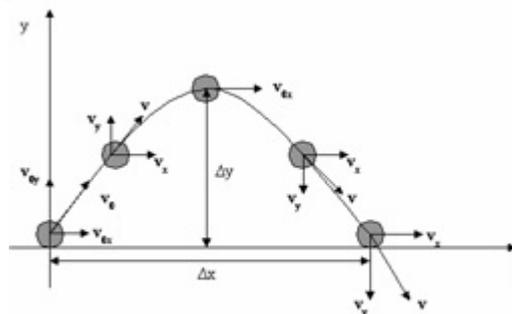
$$m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = R \cdot \vec{v}_e - \vec{F}_{ext} \quad (4.4)$$

Lembrando que $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, ou seja, a variação da velocidade ao desenrolar do tempo, que é dada por $R \cdot \vec{v}_e$, que expressa a vazão do líquido, menos \vec{F}_{ext} , as forças que interagem durante a trajetória, que são as forças gravitacional e de arrasto para o modelo elaborado a seguir.

Sobrepondo, as considerações das demonstrações anteriores em relação às forças aplicadas sobre um projétil, justamente com a equação para o sistema físico de massa variável, elaborou-se a proposta do modelo físico-matemático para o lançamento do foguete de garrafas PET, no movimento oblíquo, ou seja, no movimento para os planos dos eixos x e y .

Inicialmente, deve-se lembrar que um movimento oblíquo, trata-se de um movimento parte horizontal e um movimento parte vertical, como na figura a seguir.

Figura 4.1: Ilustração de um movimento oblíquo.



Fonte: Escola de Engenharia de Piracicaba, **Determinação da Velocidade de Lançamento do Projétil**. 2008.

Assim quando certo objeto é lançado ou arremessado com um determinado ângulo com a horizontal, o mesmo adquire um movimento oblíquo, no qual teoricamente se determina o movimento utilizando como ferramenta o plano cartesiano, nos eixos x e y , assim sendo, no movimento horizontal, expressada no eixo x , apresenta a equação para o movimento na horizontal, consequentemente para o eixo y , obtém a expressão para o movimento na vertical.

Analisaremos este lançamento da seguinte forma. Primeiramente partindo do

repouso ($t_0 = 0$), instante em que inicia-se a propulsão do foguete gerada pela vazão do líquido, até um determinado instante (t_1), em que todo o líquido foi ejetado, logo entre t_0 e t_1 houve variação da massa do foguete.

O segundo momento inicia-se a partir do instante (t_1) até o final do deslocamento. Assim, a partir de (t_1) não ocorre mais variação de massa, restando apenas a massa do foguete, ou seja, o sistema agora possui massa fixa e assume novas equações.

Portanto, para o intervalo $0 < t \leq t_1$, da equação de massa variável, temos:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = R \cdot v_e - b \cdot V^2 - m \cdot g$$

$$\Rightarrow \int_0^V dV = \int_0^{t_1} \frac{R}{m} \cdot v_e \cdot dt - \int_0^{t_1} \frac{b}{m} \cdot V^2 \cdot dt - \int_0^{t_1} g \cdot dt$$

Note que, o termo (F_{ext}) foi substituído pelos termos das forças externas, consideradas atuando no sistema, em que o termo $b \cdot V^2$ representa a força de arrasto e $m \cdot g$ a força gravitacional.

Porém, o efeito da força de arrasto é difícil de resolver por métodos de integração simples (a função integrada no termo da força de arrasto é justamente a função que se quer encontrar), desta forma, para análise no intervalo $0 < t \leq t_1$, devemos fazer algumas considerações. Logo, com a análise de alguns dados experimentais fornecidos pelo grupo PIBID-IFSC do campus Araranguá, obtidos nas edições dos Campeonatos de Lançamentos de Foguetes², temos as seguintes resoluções.

Para um foguete em que, a pressão fornecida no interior da garrafa, para gerar sua propulsão é de $P_1 = 80 \text{ psi} = 551.581 \text{ Pa}$, a pressão atmosférica $P_2 = 14,69 \text{ psi} = 101.325 \text{ Pa}$ e ρ a densidade da água, obtemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (P_1 - P_2) + 2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Em que o termo Δh , que representa a variação das alturas do sistema, por ser muito pequeno em relação aos outros termos (dado as dimensões da garrafa) é desprezado, logo:

$$v_e = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot (P_1 - P_2)} = \sqrt{\frac{2}{1000} \cdot (551.581 - 101.325)} \approx 30 \frac{m}{s}$$

Ainda, estimando que a taxa de variação com que a água é expelida é de aproxi-

²CLUBE DE ASTRONOMIA DE ARARANGUÁ, Campeonato de Lançamento de Foguetes. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/ifscastronomia/clf>>. Acesso em: Maio de 2016.

madamente $R \cong \frac{1Kg}{1s}$, podemos obter a intensidade da força de propulsão.

$$R \cdot v_e = \frac{1Kg}{1s} \cdot 30 \frac{m}{s} = 30N \quad (4.5)$$

O valor da equação 4.5 foi estipulado, para este trabalho, através da equação de escoamento estacionário, porém, sabemos que durante a vazão da água no foguete de garrafas PET o fluido é acelerado. Assim, certamente o valor da velocidade de escoamento efetivo deve ser maior. Em outras palavras, o valor estimado para força de impulsão é menor que o real. De maneira similar, para a força de arrasto, onde $C_x = 0,75$ é o coeficiente de arrasto no espaço em que se encontra o projétil³, ρ é a densidade do ar, $A = \pi \cdot r^2$ ($r \cong 5 \text{ cm}$) é a área aproximada da garrafa PET e V , estimando seu valor, de maneira simplificada, da equação do alcance máximo do lançamento oblíquo, utilizando o maior alcance obtido na última edição do Campeonato de Lançamento de Foguetes de Araranguá, que foi de $116,3m$, temos:

$$\begin{aligned} V = V_0 &= \sqrt{A_{mx} \cdot g} = \sqrt{116,3 \cdot 9,8} \cong 34 \frac{m}{s} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot \rho \cdot A \cdot V^2 &= \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 34^2 \cong 4N \\ \Rightarrow b \cdot V^2 &\cong 4N \end{aligned} \quad (4.6)$$

Analisando os resultados obtidos em 4.5 e 4.6, podemos perceber que, $|R \cdot v_e| > |b \cdot V^2|$, logo, até determinado instante t_1 , o efeito da força de arrasto será desprezado, por necessidade da resolução da equação diferencial de forma analítica e em face das aproximações apresentadas, assim:

³Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná. Disponível em: <http://servidor.demec.ufpr.br/foguete/apostila/Capitulo_04_Cd_v2.pdf>. Acesso em: Maio de 2016.

$$\begin{aligned}
m \cdot \frac{dV_x}{dt} &= R \cdot v_{e_x} \\
\begin{matrix} v_{e_x} = v_e \cdot \cos \theta \\ \Rightarrow \end{matrix} & m \cdot \frac{dV_x}{dt} = R \cdot v_e \cdot \cos \theta \\
\begin{matrix} m = m_0 - R \cdot t \\ \Rightarrow \end{matrix} & \frac{dV_x}{dt} = \frac{R}{(m_0 - R \cdot t)} \cdot v_e \cdot \cos \theta \\
\Rightarrow & \int_0^{V_x} dV_x = \int_0^{t_1} \frac{R}{(m_0 - R \cdot t)} \cdot v_e \cdot \cos \theta \cdot dt \\
\begin{matrix} \int \frac{1}{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| \\ \Rightarrow \end{matrix} & V_x = v_e \cos \theta \cdot R \cdot \frac{1}{R} \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot t_1} \right) \\
\Rightarrow & V_x = v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot t_1} \right) \\
\begin{matrix} m_f = R \cdot t_1 \\ \Rightarrow \end{matrix} & V_x = v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right)
\end{aligned}$$

Como $V_x = \frac{dx}{dt}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right) \\
\Rightarrow dx &= v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right) \cdot dt \\
\Rightarrow \int_0^{x_1} dx &= \int_0^{t_1} v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right) \cdot dt \\
\Rightarrow x_1 &= v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right) \cdot t_1 \tag{4.7}
\end{aligned}$$

A equação 4.7 representa o deslocamento no eixo x durante o período de propulsão do foguete, para o deslocamento no eixo y a equação é semelhante, com diferença da ação da força gravitacional a seguir:

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = R \cdot v_{e_y} - m \cdot g \tag{4.8}$$

Logo, no primeiro momento analisado, o deslocamento para y é:

$$\begin{aligned} v_{ey} = v_e \cdot \sin \theta \\ \Rightarrow m \cdot \frac{dV_y}{dt} &= R \cdot v_e \cdot \sin \theta - m \cdot g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = m_0 - R \cdot t \\ \Rightarrow (m_0 - R \cdot t) \cdot \frac{dV_y}{dt} &= R \cdot v_e \cdot \sin \theta - (m_0 - R \cdot t) \cdot g \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_y}{dt} = \frac{R}{(m_0 - R \cdot t)} \cdot v_e \cdot \sin \theta - g$$

$$\Rightarrow \int_0^{V_y} dV_y = \int_0^{t_1} \frac{R}{(m_0 - R \cdot t)} \cdot v_e \cdot \sin \theta \cdot dt - \int_0^{t_1} g \cdot dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| \\ \Rightarrow V_y = v_e \cdot \sin \theta \cdot R \cdot \frac{1}{R} \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot t_1} \right) - g \cdot t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_f = R \cdot t_1 \\ \Rightarrow V_y = v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) - g \cdot t_1 \end{aligned}$$

Como $V_y = \frac{dy}{dt}$ então:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) - g \cdot t_1 \\ \Rightarrow dy &= v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) \cdot dt - g \cdot t_1 \cdot dt \\ \Rightarrow \int_0^{y_1} dy &= \int_0^{t_1} v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) \cdot dt - \int_0^{t_1} g \cdot t_1 \cdot dt \\ \Rightarrow y_1 &= v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) \cdot t_1 - g \cdot t_1^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Portanto para o primeiro momento ($0 < t \leq t_1$), as equações 4.7 e 4.9 expressam o deslocamento nos planos x e y , durante a variação de massa. Já no segundo momento ($t > t_1$) temos um sistema de massa fixa e velocidade gerada pela propulsão da etapa anterior e desenvolve-se as seguintes equações.

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{dV_x}{dt} &= -b \cdot V_x^2 \\ \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{b}{m} \cdot V_x^2 \end{aligned}$$

Que são originárias da equação 4.4. Reorganiznado os termos, para aplicar o processo de integração, temos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\frac{b}{m} \cdot dt = \frac{dV_x}{V_x^2} \\
&\Rightarrow \int_0^t -\frac{b}{m} \cdot dt = \int_{V_0 \cos \theta}^{V_x} \frac{dV_x}{V_x^2} \\
\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} = -x^{-1} &\Rightarrow -\frac{b}{m} \cdot t = (V_0 \cos \theta)^{-1} - (V_x)^{-1} \\
&\Rightarrow \frac{b}{m} \cdot t = (V_x)^{-1} - (V_0 \cos \theta)^{-1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\frac{b}{m} \cdot t} = V_x - V_0 \cos \theta \\
&\Rightarrow V_x = \frac{1}{\frac{b}{m} \cdot t} + V_0 \cos \theta \\
&\Rightarrow V_x = \frac{V_0 \cos \theta}{\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

A equação encontrada em (4.10), trata-se da equação da velocidade, na componente (ou seja, eixo x) horizontal. Relembrando que $V_x = \frac{dx}{dt}$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{V_0 \cos \theta}{\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1} \\
\Rightarrow \int_{x_1}^x dx &= \int_0^t \frac{V_0 \cos \theta}{\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1} dt \\
\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) &\Rightarrow x - x_1 = V_0 \cos \theta \cdot \frac{1}{\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta} \ln \left(\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1 \right) \\
\stackrel{k=\frac{b}{m}}{\Rightarrow} &x = \frac{1}{k} \ln (k \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1) + x_1 \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Ou seja, expressão (4.11), representa o deslocamento horizontal de um objeto, sob a condição da influência da força de resistência (arrasto) do ar, com o decorrer do tempo.

Agora, para posição vertical, além do que já tratamos anteriormente temos a ação da força gravitacional. Assim, novamente partindo da expressão (4.4), considerando a variação da velocidade no eixo y , temos:

$$\begin{aligned}
m \cdot \frac{dV_y}{dt} &= -b \cdot V_y^2 - m \cdot g \\
\Rightarrow \frac{dV_y}{dt} &= -\frac{b}{m} \cdot V_y^2 - g \\
\Rightarrow \frac{dV_y}{dt} &= -g \cdot \left(\frac{b}{mg} \cdot V_y^2 + 1 \right) \\
c = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \frac{1}{c^2} = \frac{b}{mg} \Rightarrow \frac{dV_y}{dt} &= -g \cdot \left(\frac{V_y^2}{c^2} + 1 \right) \\
\Rightarrow \frac{dV_y}{dt} &= -g \cdot \left(\frac{V_y^2 + c^2}{c^2} \right)
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos, para posteriormente integrar:

$$\begin{aligned}
-g \cdot dt &= \frac{c^2 \cdot dV_y}{(V_y^2 + c^2)} \\
\Rightarrow -g \int_0^t dt &= c^2 \int_{V_0 \sin \theta}^{V_y} \frac{dV_y}{(V_y^2 + c^2)} \\
\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow -g \cdot t &= c^2 \cdot \frac{1}{c} \left[\arctan\left(\frac{V_y}{c}\right) - \arctan\left(\frac{V_0 \sin \theta}{c}\right) \right] \\
\Rightarrow -g \cdot t &= c \cdot \left[\arctan\left(\frac{V_y}{c}\right) - \arctan\left(\frac{V_0 \sin \theta}{c}\right) \right] \\
\Rightarrow -\frac{g}{c} \cdot t &= \arctan\left(\frac{V_y}{c}\right) - \arctan\left(\frac{V_0 \sin \theta}{c}\right) \\
\Rightarrow \arctan\left(\frac{V_y}{c}\right) &= \arctan\left(\frac{V_0 \sin \theta}{c}\right) - \frac{g}{c} \cdot t \\
\Rightarrow \frac{V_y}{c} &= \tan \left[\arctan\left(\frac{V_0 \sin \theta}{c}\right) - \frac{g}{c} \cdot t \right]
\end{aligned}$$

Logo, a equação da velocidade para o eixo y será:

$$V_y = c \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right] \quad (4.12)$$

Ou ainda,

$$\stackrel{c=\sqrt{\frac{mg}{b}}}{\Rightarrow} V_y = \sqrt{\frac{mg}{b}} \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \right) - \frac{g}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \cdot t \right] \quad (4.13)$$

E como $V_y = \frac{dy}{dt}$, podemos chegar a equação da posição, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= c \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right] \\ \Rightarrow dy &= c \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right] dt \\ \Rightarrow \int_{y_1}^y dy &= c \cdot \int_0^t \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right] dt \\ \Rightarrow y - y_1 &= c \cdot \int_0^t \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right] dt \end{aligned}$$

Tomando $u = \arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t$ e aplicando o método da substituição, temos que $du = -\frac{g}{c} dt$ o que implica em $dt = -\frac{c}{g} \cdot du$ e assim:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y - y_1 &= c \cdot -\frac{c}{g} \cdot \int_0^u \tan u \cdot du \\ \stackrel{\int \tan x dx = -\ln(\cos x)}{\Rightarrow} y - y_1 &= \frac{c^2}{g} \cdot \ln(\cos u) \\ \Rightarrow y - y_1 &= \frac{c^2}{g} \cdot \ln \left[\cos \left(\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right) \right] \\ \Rightarrow y &= \frac{c^2}{g} \cdot \ln \left[\cos \left(\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{c} \right) - \frac{g}{c} \cdot t \right) \right] + y_1 \quad (4.14) \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
 \stackrel{c=\sqrt{\frac{mg}{b}}}{\Rightarrow} y &= \frac{m}{b} \cdot \ln \left[\cos \left(\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \right) - \frac{g}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \cdot t \right) \right] + y_1 \\
 \stackrel{k=\frac{b}{m}}{\Rightarrow} y &= \frac{1}{k} \cdot \ln \left[\cos \left(\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{\sqrt{\frac{g}{k}}} \right) - \frac{g}{\sqrt{\frac{g}{k}}} \cdot t \right) \right] + y_1 \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Desta maneira foram obtidas quatro equações de deslocamento para os eixos x e y , de acordo com a análise do movimento nos seguintes períodos, $0 < t \leq t_1$ e $t > t_1$. Logo, ao plotarmos tais equações em conjunto, obtemos expressões que caracterizam o deslocamento do foguete no plano xy , mediante influência da gravidade e da resistência do ar que interagem ao longo deste tipo de processo.

Apresentamos na tabela abaixo um resumo das mesmas:

Tabela 4.1: Resumo das expressões obtidas:

	$0 < t \leq t_1$	$t > t_1$
Eixo x	Velocidade: $V_x = v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right)$	Velocidade: $V_x = \frac{V_0 \cos \theta}{\frac{b}{m} \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1}$
	Deslocamento: $x_1 = v_e \cos \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R \cdot m_f} \right) \cdot t_1$	Deslocamento: $x = \frac{1}{k} \ln (k \cdot V_0 \cos \theta \cdot t + 1) + x_1$
Eixo y	Velocidade: $V_y = v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) - g \cdot t_1$	Velocidade: $V_y = \sqrt{\frac{mg}{b}} \cdot \tan \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \right) - \frac{g}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} \cdot t \right]$
	Deslocamento: $y_1 = v_e \cdot \sin \theta \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_f} \right) \cdot t_1 - g \cdot t_1^2$	Deslocamento: $y = \frac{1}{k} \cdot \ln \left[\cos \left[\arctan \left(\frac{V_0 \sin \theta}{\sqrt{\frac{g}{k}}} \right) - \frac{g}{\sqrt{\frac{g}{k}}} \cdot t \right] \right] + y_1$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerações Finais

A ideia inicial deste trabalho era desenvolver a relação entre a física e a matemática, através do estudo da modelagem do lançamento do foguete de garrafas PET em dois estágios, elaborando assim um protótipo, ou seja, construir um molde para este tipo de foguete. Isto é, pretendíamos realizar o estudo teórico das equações de movimento presente neste tipo de lançamento e estender a análise para o estudo prático, lançando o protótipo desenvolvido e comparando os dados obtidos com as equações estudadas, assim trabalhando nos dois campos de estudo.

Porém, durante o período disponível para o projeto, não conseguimos chegar à construção de um protótipo que pudesse satisfazer as condições exigidas, devido a necessidade de diversas modificações da ideia base do modelo para o foguete, por tentativas e falhas nos lançamentos.

Desta maneira, optamos por manter o estudo no lançamento do foguete de garrafas PET simples, ou seja, aquele em que sua estrutura não se separa em estágios, assim realizando um único movimento.

Logo, no presente trabalho, efetuamos o estudo sistemático sobre a análise de um sistema físico, possibilitando o amadurecimento no entendimento de alguns conceitos físicos e matemáticos, desde o âmbito de examinar, investigar a à aplicações simples de equações diferenciais, explorando o campo da modelagem em sistemas físicos de massa variável.

Tal estudo permite entrelaçar os ramos da física e matemática, buscando demonstrar o uso desta interdisciplinaridade como ferramenta para resolução de exercícios ou problemas encontrados na área da física. Notando que, para tais efeitos, algumas resoluções das equações, em determinados problemas, necessitam de considerações e condições iniciais inerentes para que se possa obter um resultado satisfatório.

Podemos ver também que o estudo dos aspectos físicos e matemáticos abordados na análise do lançamento de foguetes possuem uma gama de conhecimentos que permitem alcançar diversos objetivos, destacando-se o domínio da observação, interpretação e investigação. Além disso, mesmo não presente neste trabalho, permiti interagir com diversos conceitos e ferramentas, por exemplo, a utilização da matemática computacional, podendo incluir o estudo de softwares para simulação e também sendo uma ótima oportunidade da utilização de tecnologias para fins didáticos.

Esperamos que este trabalho sirva de inspiração e ajuda para futuros estudantes de física e matemática, sendo o ponto de partida para outros estudos similares. Logo, deixo como sugestão, a quem interessar, resolver analiticamente a função, cujo

resolução estimado. Além disso, outra opção de continuidade deste trabalho é o desenvolvimento de uma simulação, aplicando as equações aqui desenvolvidas.

Referências Bibliográficas

- [1] ALONSO, Marcelo; FINN, Edward. **Física um curso universitário, volume 1: Mecânica**. 1. Ed. São Paulo: Blucher, 2009.
- [2] ANDERSON, Davi; EBERHARDT, Scott. **Como Aviões Voam: Uma Descrição Física do Voo**. Física na Escola, v. 7, n. 2, p 43-51, 2006.
- [3] BARCELOS NETO, João. **Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana**. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [4] BATTISTI, Aloisio José. **Equações Diferenciais Aplicadas em escoamento de Fluidos**, Florianópolis, UFSC, 2002.
- [5] BATISTA, Eliezer; MOZOLEVSKI, Igor. **Métodos de Física-Matemática**, Florianópolis, UFSC, 2010.
- [6] BRANDÃO, Rafael Vásques; ARAUJO, Ives Solano; VEIT, Eliane Angela. **A modelagem científica de fenômenos físicos e o ensino de física**, UFRGS. Física na Escola, v. 9, n. 1, 2008.
- [7] FIOLHAIS, Carlos . **A matemática vista pelas outras ciências**, Universidade de Coimbra. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/inv/debate2/CarlosFiolhais.html>>. Acesso em Abril de 2015.
- [8] CASSETTA, L. **Contribuições à Mecânica dos Sistemas de Massa Variável**, 2008, 204 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- [9] CLUBE DE ASTRONOMIA DE ARARANGUÁ, Campeonato de Lançamento de Foguetes. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/ifscastronomia/clf>>. Acesso em Maio de 2016.

- [10] DAROIT, Luciane; HAETINGER, Claus; DULLIUS, Maria Madalena. **O Ensino de Fenômenos Físicos Através da Modelagem Matemática**. In: X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Ijuí, 2009.
- [11] DA SILVA, Claudio Xavier; BARRETO FILHO, Benigno. **Física aula por aula**. 1. Ed. São Paulo: FDT, 2010.
- [12] DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MÊCANICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Disponível em: <http://servidor.demec.ufpr.br/foguete/apostila/Capitulo_04_Cd_v2.pdf>. Acesso em: Maio de 2016.
- [13] GUIMARÃES, Osvaldo; ROBERTO, José; CARRON, Wilson. **Física 1**. 1. Ed. São Paulo: Ática, 2013.
- [14] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física, volume 1: Mecânica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [15] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física, volume 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 8. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [16] HAMILTON, Calvin J. **Uma breve historia dos foguetes**. Disponível em: <<http://solarviews.com/portug/rocket.htm>>. Acesso em: Agosto de 2015.
- [17] INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO. **Sistema de Massa Variável**, Lisboa, 2004. Disponível em: <<http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/topico.asp?id=381>>. Acesso em: maio de 2015.
- [18] MATHIAS, Marlon Sproesser; RIBEIRO, Marcos Vinícius Fernandes; JÚNIOR, Paulo Celso Greco. **Simulação numérica do Lançamento de um Foguete para Análise de Estabilidade e Desempenho**. In: VII CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MÊCANICA, São Luís, ABCM, 2001.
- [19] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica, volume 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. 4. Ed. São Paulo: Blucher, 2002.
- [20] OLIVEIRA, Marco Antônio Sodré. **Os aspectos físicos e matemáticos do lançamento do foguete de garrafa pet**, Brasília: UCB, 2008.
- [21] PASCOAL; CASTRO; ROSA. **The Influence of the Drag Force on the Safety Domain**, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 2, 2301, 2011.

- [22] PEREIRA, Lúcia Resende; BONFIM, Valdair. **Regiões de Segurança em Lançamento de Projéteis**, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 3, 3313, 2008.
- [23] PÔRTO, Cleovam da Silva. **Os Foguetes: História e Desenvolvimento**. UnB, 2010. Disponível em: <https://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/os-foguetes-ii_revisado.pdf>. Acesso em: Agosto de 2015.
- [24] SOUZA, James Alves. **Um Foguete de Garrafas pet**, UFSCar. Física na Escola, v. 8, n. 2, p 4-11, 2007.
- [25] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Instituto de Física, CREF. **Equação de Bernoulli**. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/cref/werlang/aula3.htm>> Acesso em: maio de 2015.
- [26] UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Departamento de Física, **Fluidos Reais e Ideais**. Disponível em: <<http://coral.ufsm.br/gef/fluidos.htm>> Acesso em: outubro de 2015.
- [27] WHITE, Frank M. **Fluid Mechanics**. 7th Ed. New York: McGraw Hill, 2011.