NÚMEROS COMPLEXOS E INCOMPLEXOS NAS OBRAS DE JÁCOMO STÁVALE NA DÉCADA DE 1940

Ana Isabel Moreira Feitosa[1]

Roberto João Eissler[2]

Resumo. A Matemática é exata, precisa. Não há ambiguidades na matemática, ou pelo menos não deveria haver. Contudo, no ensino da matemática seria possível existir algo que possa causar uma confusão ou uma controvérsia que envolva a matemática? Por meio de um estudo qualitativo e documental, analisar-se-á o capítulo "Números Complexos", nas obras matemática Primeiro Ano de Matemática e Elementos de Matemática, escrita por Jácomo Stávale na primeira metade da década de 1940, disponíveis no repositório institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). O autor utiliza a mesma nomenclatura para conceitos diferentes e verifica-se que não havia a preocupação em diferenciar Números Complexos ensinado no primeiro colegial do ensinado no quarto ano.

Palavras-Chave: Números Complexos. Jácomo Stávale. História de Ensino de Matemática. História da Educação Matemática.

[1] Graduada em Matemática na Universidade Estadual do Amazonas (UEA). Acadêmica do curso lato sensu em Educação em Ciência e Matemática do Instituto Federal de Santa Catarina. anaisabelmoreiraf@gmail.com .

[2] Doutor em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Professor do Instituto Federal de Santa Catarina. eissler@ifsc.edu.br

COMPLEX AND INCOMPLEX NUMBERS IN THE WORKS OF JÁCOMO STÁVALE IN THE 1940s

Ana Isabel Moreira Feitosa[3]

Roberto João Eissler[4]

Abstract: The Mathematics is exact, precise. There are no ambiguities in mathematics, or at least there shouldn't be. However, in the teaching of mathematics, would it be possible for there to be something that could cause confusion or controversy involving mathematics? Through a qualitative and documentary study, the chapter "Complex Numbers" will be analyzed, in the mathematical works First Year of Mathematics and Elements of Mathematics, written by Jácomo Stávale in the first half of the 1940s, available in the institutional repository of Federal University of Santa Catarina (UFSC). The author uses the same nomenclature for different concepts and it appears that there was no concern about differentiating Complex Numbers taught in first grade from those taught in fourth year.

Keywords: Complex Numbers. Jácomo Stávale. History of Teaching Mathematics. History of Mathematics Education.

[3] Graduated in Mathematics at the State University of Amazonas (UEA). Student of the lato sensu course in Science and Mathematics Education at the Federal Institute of Santa Catarina.. anaisabelmoreiraf@gmail.com .

[4] PhD in Education from the Pontifical Catholic University of Paraná (PUC-PR). Professor at the Federal Institute of Santa Catarina. eissler@ifsc.edu.br .

1 INTRODUÇÃO

Ao manusear o livro didático “Matemática (Aritmética)” – 1º ano propedêutico, dos autores Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio, publicado em 1939, encontrou-se uma definição de números complexos que é diferente daquela que é utilizada atualmente no Ensino Médio e, que está, por exemplo, no livro Contato Matemática, 3º ano de Joamir Souza e Jaqueline Garcia (2016) utilizado nos cursos técnicos integrados no Ensino Médio do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC) campus Jaraguá do Sul.

Na língua portuguesa temos palavras homônimas, ou seja, palavras iguais na grafia e na pronúncia, mas com significados diferentes. Como se pode ver nas frases “não há caminho, caminho se faz ao andar” e “Eu caminho firme em busca de meus objetivos”, onde o primeiro “caminho” é substantivo e o segundo verbo. No entanto, na Matemática não deveríamos ter um termo que significasse duas coisas diferentes, mas no ensino da Matemática a expressão “números complexos” teve significados diferentes em épocas distintas.

Nas décadas de 1940 e 1950 Jácomo Stávale publicou diversos livros, entre eles: “Elementos de Matemática” para a Primeira à Quarta Série do Curso Ginasial e “Problemas de Matemática” para a Primeira à Quarta Série Ginasial, ambos em 4 volumes e em várias edições de 1943 a 1957; também publicou “Primeiro ao Quinto Ano de Matemática” e “Exercícios de Matemática” para o Primeiro ao Quinto Ano, ambos em 5 volumes e em várias edições de 1932 a 1942.

Nesses livros há definições diferentes para os complexos. Desta forma, a ideia é investigar que conceito era utilizado naquela época e a que se referia. Para tanto, serão analisadas, no tocante aos números complexos e incomplexos, as obras:

- **Primeiro Ano de Matemática,** vol. 12 da 2a série da Biblioteca Pedagógica Brasileira, 17ª Edição, 1941. Stávale, Jácomo. Companhia Editora Nacional.

- **Elementos de matemática**, vol. 1, 3ª Edição, 1943. Stávale, Jácomo. Companhia Editora Nacional.

- **Elementos de Matemática**, vol 4, 4ª série, 3ª Edição de 1944. Companhia Editora Nacional.

Portanto, desenvolveu-se a pesquisa apresentando alguns aspectos da História da Matemática envolvendo os Números Complexos (2.1), a seguir verificou-se a existência desse conteúdo nos livros didáticos (2.2) e nesses livros há um autor que apresenta dois conceitos diferentes para Números Complexos (2.3). Posteriormente, apresenta-se, de forma comentada, os conceitos e exemplos desses números (2.4, 2.5 e 2.6) trazendo-os para o tempo presente por meio dos parâmetros curriculares (2.7). Por conseguinte, apresentam-se as Considerações Finais, onde se faz uma breve síntese da pesquisa.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Os primeiros registros dos Números Complexos (História da Matemática)

O número imaginário é o resultado de um enigma que deixou os matemáticos atordoados durante muitos séculos. Este número surge quando tentamos resolver a raiz quadrada de números inteiros negativos.

Em 75 d.C, o matemático grego Héron de Alexandria tentando calcular o volume de parte de uma pirâmide, se deparou com o número. Anos depois, o matemático Niccolò Fontana, o usou para resolver a raiz quadrada dos números inteiros negativos (BENTLEY, 2009).

Em troca de um emprego melhor, Fontana acabou revelando a Cardano seu método de resolução (em forma de poema), em contrapartida pediu segredo sobre tal descoberta. Depois de se arrepender, Fontana respondeu uma pergunta de Cardano tentando confundi-lo. Cardano, então "[...] Decidiu tratar esses resultados como se fossem números [...]" (BENTLEY, 2009) e com a ajuda de outro matemático além de conseguir solucionar o número imaginário, ampliou a sua utilização em outros estudos. Nomearam então a publicação do método como Del Ferro, por encontrar em estudos anteriores, outro inventor da solução. Aproximadamente um ano depois, Fontana publicou o seu lado da história da descoberta da solução.

A partir de então, os números imaginários começaram a ser vistos com frequência na resolução de outros problemas. Descartes introduziu o "número imaginário". Décadas depois, De Moivre e Newton juntaram seus estudos para integrar a trigonometria com os números complexos para resolver os problemas que no passado Cardano enfrentava.

Anos mais tarde, Euler traz o símbolo i para representar de maneira simples a $\sqrt{-1}$. Aproximadamente, em 1800, Caspar Wessel faz a primeira representação geométrica dos números imaginários, que passa despercebido em livros por cem anos e é publicada por fim por Jean-Robert Argand (e é conhecida até hoje como Diagrama de Argand).

2.2 Os Números Complexos nos livros didáticos

Nem tudo o que se invente ou se descobre em Matemática vai para a escola. Os livros utilizados no ensino de matemática são fontes preciosas para entendermos o ensino da matemática.

Com intuito de buscar informações a respeito de livros didáticos antigos, particularmente os escritos por Jácomo Stávale, deparamo-nos com Repositório Institucional da UFSC, que possui na área da História da Educação Matemática, as seguintes coleções: legislação escolar; livros didáticos; revistas pedagógicas; artigos acadêmicos; teses e dissertações, entre outras.

Encontramos livros e manuais didáticos de matemática desde o século XIX, assim como legislação escolar pertinente. Naturalmente, não está completo, pois o mesmo encontra-se em construção. No entanto, tem-se a expressiva quantidade de 700 itens no verbete “livros didáticos e manuais pedagógicos”.

Segundo a autora ZUIN (2008), em estudos a respeito dos livros didáticos de aritmética no Brasil oitocentista, os tópicos presentes nesses manuais se concentravam em “Números e as quatro operações fundamentais; Frações; **Números Complexos;** Sistema de pesos e medidas; Razões; Proporções; Regra de três”.

A expressão Números Complexos mencionada por Zuin (2008), no contexto das séries iniciais, tem definição semelhante àquela presente no livro “Matemática (Aritmetica)”, de Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio, publicado em meados do século XX, ou seja “*números complexos são números concretos que encerram diferentes espécies de unidades dependentes umas das outras, segundo uma lei determinada*” (CALIOLI & D’AMBROSIO, 1939, p.191). E neste livro, o número de páginas destinadas ao estudo de Números Complexos é de 29, o que corresponde a aproximadamente 9% do total de páginas (320) do livro.

Os números complexos como é ensinado atualmente no Ensino Médio, é diferente desse conceito apresentado no parágrafo anterior, mas tem relação com a ideia de calcular a raiz quadrada de um número negativo.

2.3 Os Números Complexos nos livros didáticos de Jácomo Stávale

No Repositório da UFSC, encontra-se um livro didático de um autor que apresenta dois conceitos de Número Complexo, em contextos diferentes. Trata-se de Jácomo Stávale.

O repositório temático da UFSC está fundamentado no uso do software DSpace. Este é construído na forma de sub-unidades naturais e “comunidades” onde cada comunidade tem suas “coleções” que, por sua vez, contém “itens” que representam os conteúdos digitais. Todas estas informações são alimentadas por metadados que tem como finalidade facilitar a localização e recuperação das informações. Ou seja, todos os registros podem ser acessados por palavras chaves ou qualquer outro sistema de busca mais avançado (CAFÉ et al, 2003).

Desse modo, em outras palavras, o repositório cumpre com seu papel encurtando a distância entre os pesquisadores e os documentos, a partir de suas digitalizações das fontes primárias da História da Educação Matemática. Tal iniciativa intenta motivar mais e mais pesquisas na área da História da Educação Matemática, bem como promover a organização dos documentos que são encontrados no desenvolvimento dos projetos de pesquisa. Pois, entende-se, aqui, que as fontes são preciosas e que a sua organização e disponibilização para a comunidade interessada em Educação Matemática são fundamentais para constituição dessa área de pesquisa. (COSTA, 2022).

Jácomo Stávale nasceu na cidade do Rio de Janeiro em 10 de abril de 1882, ainda jovem mudou-se com a família para São Paulo. Foi professor primário e secundário de vários estabelecimentos de ensino em São Paulo e autor de vários livros didáticos que, conforme Pfromm Neto et al. (1972, p.81) apud Tripoli (2005), os livros didáticos de Jácomo Stávale "[…] totalizaram mais de 150 edições, com um número aproximado de um milhão de exemplares". Faleceu na cidade de São Paulo em 5 de janeiro de 1956 (Tripoli, 2005).

Alguns de seus livros foram publicados pela Cia Editora Nacional tornando-se referência didática e curricular em todo o território nacional. Neste artigo, apenas três obras escritas por Stavale serão analisadas, a saber: Primeiro Ano de Matemática, vol. 12 da 2a série da Biblioteca Pedagógica Brasileira, 17ª Edição, 1941; Elementos de matemática, volume 1, 3ª Edição, 1943, e Elementos de Matemática volume 4, de 1944; no que se refere aos números complexos.

No Quadro 1, apresenta-se o sumário desses livros citados.

Quadro 1: Sumário dos livros

Primeiro Ano de Matemática, 1941	Elementos de Matemática, v.1, 1943	Elementos de Matemática, v.4, 1944
Capítulo XIII: ➢ Preliminares. ➢ Redução de um número complexo a incomplexo. ➢ A unidade monetária inglesa. ➢ A unidade angular. ➢ Redução de um número incomplexo a complexo. ➢ Transformação de um número complexo em fração. ➢ Transformação de fração em número complexo. ➢ Adição de números complexos. ➢ Subtração de números complexos. ➢ Multiplicação de números complexos. ➢ Medidas inglesas de comprimento.	Capítulo VII: ➢ Preliminares. ➢ Definições. ➢ unidade de tempo. ➢ Redução de um número complexo a incomplexo. ➢ A unidade monetária inglesa. ➢ A unidade angular. ➢ Redução de um número incomplexo a complexo. ➢ Transformação de um número complexo em fração. ➢ Transformação de uma fração em número complexo. ➢ Adição de números complexos. ➢ Subtração de números complexos. ➢ Multiplicação de números complexos.	Capítulo IV: ➢ [...] ➢ Os números imaginários ➢ O quadrado da unidade imaginária. ➢ As potências da unidade imaginária. Capítulo V: Equações de Segundo Grau ➢ Preliminares ➢ A radiciação nas equações de segundo grau ➢ Resolução da equação $ax^2 + bx = 0$ ➢ Resolução da equação $ax^2+c= 0$ ➢ O trinômio quadrado perfeito ➢ Resolução direta da equação $ax^2 + bx + c = 0$ ➢ Resolução indireta da equação $ax^2 + bx$

➢ Divisão de números complexos. ➢ Medidas inglesas de capacidade. ➢ Medidas inglesas de peso.	➢ Medidas inglesas de comprimento. ➢ Divisão de complexos.	+ c = 0 ➢ Resolução da equação $x^2 + px + q = 0$ ➢ Raízes reais e imaginárias: o discriminante ➢ Discussão da fórmula resolutiva da equação $ax^2 + bx + c = 0$ ➢ Relações entre os coeficientes e as raízes ➢ Aplicações das relações M e N [soma e produto das raízes] ➢ O Trinômio do segundo grau. [a.(x - x').(x - x")].

Fonte: elaborado pela autora (2024)

Aspectos dos conteúdos dessas obras serão analisados a seguir, buscando compreender o contexto em que aparecem os números complexos no primeiro ano e no volume 1 da obra Elementos de Matemática assim como no volume 4 de Elementos de Matemática.

2.4 Os Complexos no Primeiro Ano de Matemática (1941)

Apresenta-se a primeira dessas obras, o “Primeiro Ano de Matemática” (Anexo A), publicada em 1941. Nessa obra, consta o tópico Números Complexos e é apresentado a seguinte conclusão:

> diz-se que um **número complexo** é o constituído por unidades de espécies diferentes, porém da mesma natureza [por exemplo: 1 ano e 11 meses, 5 horas 10 minutos e 12 segundos, 1 libra 5 shillings e 2 pences]; […] e um **número incomplexo** é constituído por uma única espécie de unidade [por exemplo: 15 anos, 12 horas, 3 shillings].

O autor acrescenta ainda que números complexos e incomplexos são sempre concretos e explica como se faz a transformação de um número complexo em um incomplexo, organizados da seguinte maneira:

Redução[5] de um número complexo a incomplexo;
Redução de um número incomplexo a complexo;

[5] Redução: consiste em reduzir o complexo dado à última das suas unidades.

Transformação[6] de um número complexo em fração;
Transformação de uma fração em número complexo.

A seguir, apresenta-se duas reduções e duas transformações.

Para redução de um número complexo a incomplexo, Jácomo Stávale, no livro **Primeiro Ano de Matemática**, vol. 12 da 2ª série da Biblioteca Pedagógica Brasileira, 17ª Edição, 1941, pág.246 apresenta a operação através de um exemplo utilizando ano, meses e dias finalizando com o total de horas transformados, sendo o exemplo: Reduzir 3 anos , 7 meses , 25 dias e 10 horas a horas.

Então temos, 3 anos são 12*3 = 36 meses; 36 meses + 7 meses são 43 meses; 43 meses são 43*30 = 1.290 dias; 1.290 dias + 25 dias são 1.315 dias; 1.315 dias são 1.315*24 = 31.560 horas; 31.560 horas + 10 horas = 31.570 horas. Portanto 3 anos, 7 meses, 25 dias e 10 horas são 31.570 horas.

Assim toda a operação poderia ser indicada com a seguinte expressão aritmética: [(3*12 + 7) * 30 + 25] * 24 + 10 que, calculando a expressão, acharemos as 31.570 horas.

Na obra de Stávale (1941), apresenta ao aluno a moeda inglesa, a libra esterlina. Em 1943, época do lançamento do livro Elementos de matemática, vol. 1, 3ª Edição do Jácomo, uma libra equivale a 240 pence. Assim sendo, ele informa as subdivisões da moeda inglesa: “Uma libra tem 20 shillings; um shilling tem 12 dinheiros (pence) e um dinheiro (ou penny) tem 4 farthings” (p.247).

O autor apresenta a moeda inglesa com suas subdivisões: a libra £, o shilling (sh.), o pence (d.) e também o farthing (f.). Ele utiliza a palavra “dinheiro” como tradução para pence, pois a palavra “centavo” é inadequada na época, afinal o sistema monetário inglês não utiliza o sistema decimal como subdivisão. Aquela subdivisão permanecerá até 1971 quando ocorrerá uma reforma monetária.

Stávale não apresenta um exemplo de redução para moeda inglesa, pois deve considerar o exemplo para reduzir ano em horas suficiente para realizar transformações/reduções da moeda inglesa, pois utilizaria o mesmo princípio. O livro segue com quinze exercícios orais e outros exercícios complementares que envolvem reduções de anos a horas (por exemplo), de libras a alguma de suas subdivisões e também de graus a minutos e/ou segundos (por exemplo).

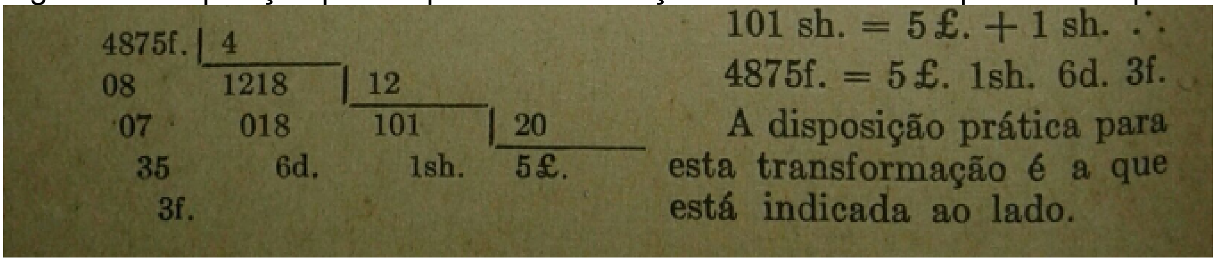
O primeiro exercício oral é “Reduzir 1£ a dinheiros”. O aluno precisaria fazer “de cabeça” 1 libra = 20 shillings * 12 pence, ou seja 1£ = 20*12, cujo resultado é 240 pence (ou 240 dinheiros). O segundo exercício oral pede para “Reduzir 3£ e 10sh a sh”, dessa maneira o aluno precisaria fazer oralmente o cálculo 3*20+10 e obter o resultado 70sh. E assim por diante com essas reduções.

Os exercícios complementares envolvem tempo, moeda inglesa e ângulos.

Um exemplo bem interessante de redução de um número incomplexo a complexo é realizado pelo autor Jácomo utilizando a moeda inglesa e suas subdivisões apresentado na Figura 1 .

[6] Transformação: consiste em converter uma fração ordinária, depois transformar em fração decimal com a aproximação pedida.

Figura 1 – Disposição prática para transformação de número incomplexo a complexo



4875f. | 4			
08	1218 | 12		
07	018	101 | 20	
35	6d.	1sh.	5£.
3f.			

101 sh. = 5£. + 1 sh. ∴
4875f. = 5£. 1sh. 6d. 3f.
A disposição prática para esta transformação é a que está indicada ao lado.

Fonte: (Stavale, 1941, p.248)

A seguir, a transformação de um número complexo em fração ordinária de uma das unidades que o compõem, Stávale utiliza o seguinte exemplo:

A que fração do ano correspondem 7 meses, 12 dias e 16 horas?

7m. 12d. 16h. = (7 X 30+12) X 24+16= 5.344 horas.
1 ano = 12 X 30 X 24 = 8.640 horas.

Se um ano tem 8.640 horas, segue-se que 1 hora = $\frac{1}{8640}$ do ano, e 5.344 horas = $\frac{5344}{8640}$ do ano.

Como um exemplo de redução, o autor apresenta a seguinte situação, reduzir 5£. 10sh. 4d. à fração da libra.

5£. 10sh. 4d. = (5 X 20+10) X 12+4 = 1.324 dinheiros.
1£. = 20 X 12 = 240 dinheiros.

Se uma £. tem 240 dinheiros, segue-se que 1 dinheiro = $\frac{1}{240}$ da £ e 1.324 d = $\frac{1324}{240}$ da £ . O autor, nesses exemplos, não faz a simplificação da fração.

Para transformar um número complexo em fração decimal de uma das unidades que o compõem, é suficiente convertê-lo primeiramente em fração ordinária e, depois, transformar esta fração decimal com a aproximação pedida.

Na transformação de fração em um número complexo, Stávale utiliza um exemplo de conversão de fração, ou seja converter $\frac{4}{11}$ do ano em número complexo.

$\frac{4}{11}$ do ano = $\frac{4}{11}$ de 12 meses = $\frac{48}{11}$ meses = 4 meses e $\frac{4}{11}$ do mês.
$\frac{4}{11}$ do mês = $\frac{4}{11}$ de 30 dias = $\frac{120}{11}$ dias = 10 dias e $\frac{10}{11}$ do dia.
$\frac{10}{11}$ do dia = $\frac{10}{11}$ de 24 horas = $\frac{240}{11}$ horas = 21 horas e $\frac{9}{11}$ da hora.
$\frac{9}{11}$ da hora = $\frac{9}{11}$ de 60 minutos = $\frac{540}{11}$ minutos = 49 minutos e $\frac{1}{11}$ do minuto.
$\frac{1}{11}$ do minuto = $\frac{1}{11}$ de 60 segundos = $\frac{60}{11}$ segundos = 5 segundos e $\frac{5}{11}$ do segundo.

Portanto, $\frac{4}{11}$ do ano = 4 meses, 10 dias, 21 horas, 49 minutos, 5 segundos e $\frac{5}{11}$ do segundo.

Assim o autor finaliza a transformação de uma fração em número complexo, após os exemplos das conversões acima, seguem exercícios orais (Figura 2), de conversão e redução na moeda inglesa.

Figura 2 – Lista de exercícios orais de redução

Exercícios orais

1. Reduzir 7sh. à fração da £.
2. Reduzir 5 dias à fração do mês.
3. Reduzir 15 minutos à fração do grau.
4. Reduzir 8 dinheiros à fração do sh.
5. Reduzir 8 horas à fração do dia.
6. Reduzir 20 minutos à fração da hora.
7. Reduzir 10sh. e 8d. à fração da £.
8. Reduzir 5sh. e 10d. à fração da £.
9. Reduzir 5 mezes e 20 dias à fração do ano.
10. Reduzir 10sh. e 10d. à fração da £.

Fonte: (Stávale, 1941, p.249)

Outros exercícios (Figura 3), são apresentados para serem resolvidos sem, necessariamente, serem feitos de maneira oral.

Figura 3 – Exercícios

Exercícios. Série LXI

1. Converter 15sh. 10d. 2f. em fração da £.
2. Reduzir 18sh. 6d. à fração decimal da £, com êrro inferior a 0,001.
3. Converter 7 meses, 10 dias e 12 horas em fração do ano.
4. Converter em fração decimal do grau, e a menos de 0,01 o número 15°24'30".
5. Reduzir 8£. 12sh. 10d. 3f. à fração da £.

Fonte: (Stávale, 1941, p.250)

Posteriormente o autor irá apresentar as operações básicas com números complexos e incomplexos.

2.5 Os complexos na obra “Elementos de Matemática”(1943) em relação a obra de 1941

Ao apresentar aspectos do número complexo da obra de 1941 no capítulo 2.4, pretende-se verificar diferenças e similitudes com a publicação de 1943.

Na obra Elementos de Matemática de 1943 (ANEXO B), o autor inicia o capítulo VII com preliminares, posteriormente as definições e na página 235 conclui seu pensamento a respeito dos números complexos da seguinte forma: “Número complexo é o número constituído por unidades diferentes, porém, da mesma natureza.”; e “Números incomplexos, é o número constituído por uma única espécie de unidade: 15 anos, 35 metros, 78 anos etc..” O autor apenas reforça o que já afirmou na obra anterior que “Os números complexos e incomplexos são sempre concretos.”

Ao comparar as obras de Jácomo Stávale, “Primeiro Ano de Matemática” (1941) e “Elementos de Matemática” (1943), observa-se que ambas abordam o conteúdo de números complexos de forma semelhante em termos de definições e contexto.

No entanto, há diferenças que merecem destaque, pois, na primeira obra, a de 1941, o autor discorre em nove (9) páginas as definições, a redução de números complexos a números incomplexos; a redução de números incomplexos a números complexos, transformações de números complexos em fração; bem como a transformação de fração em números complexos. Ele abrange as unidades monetárias inglesas, demonstra a unidade angular, medidas inglesa de comprimento e de capacidade, bem como medida inglesa de peso, e ainda as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre números complexos.

Observando a obra “Elementos de Matemática” (1943), o autor aborda o mesmo conteúdo do livro Primeiro Ano de Matemática, de 1941, isso no decorrer de onze (11) páginas, porém o autor inicia com preliminares. Nessa parte preliminar ele explana sobre o metro, seus múltiplos e submúltiplos, que são as unidades para medir uma certa classe de grandezas. Estas várias unidades guardam entre si uma relação invariável, a saber : “Cada unidade de comprimento vale 10 unidades da ordem imediatamente inferior, 10 unidades de comprimento, de uma mesma ordem forma uma unidade da ordem imediatamente superior” (p. 234).

Portanto, as unidades de comprimento são representadas tal qual como unidades do sistema decimal de numeração; os metros são as unidades de primeira ordem ; os decâmetros são dezenas; os hectômetros são centenas; os decímetros são décimos, etc…E nisto consiste a grande simplificação que se conseguiu nos cálculos, substituindo os antigos sistemas de medidas pelo sistema métrico decimal.

Mas, para medir certas grandezas, não se adotam as unidades indicadas no sistema métrico decimal e sujeitas, portanto, a divisão decimal. Donde resulta, da avaliação destas grandezas, uma classe de números especiais, os números complexos.

Com o término das preliminares, o autor discorre o item definições, que inicia-se com um exemplo idêntico ao livro de 1941, a seguir, Carlos viajou durante 5 anos, 7 meses, 15 dias e 18 horas. Números constituídos por unidades diferentes, porém da mesma natureza.

O autor dá continuidade ao assunto de números complexos finalizando com exercícios propostos envolvendo complemento de ângulo[7].

O autor não menciona, nessa parte, a existência de “outros” Números Complexos que irão aparecer em “Elementos de Matemática”.

2.6 Os Números Complexos no volume 4 de “Elementos de Matemática” (1944)

Observando a obra “Elementos de Matemática” de 1944 (ANEXO C), constata-se que o autor apresenta a sequência de conteúdo da seguinte maneira:

- ➢ Os números imaginários.
- ➢ O quadrado da unidade imaginária.
- ➢ As potências da unidade imaginária.

Ao iniciar o assunto números imaginários, o autor logo voltará a chamá-los de números complexos no capítulo V. Esses tópicos, acima, estão no final do capítulo 4 (Quadro 1), onde o autor define que número imaginário é uma raiz com índice par de um número negativo. O autor discorre sobre números complexos em vinte e uma (21) páginas.

Pela ótica de Stávale em sua obra: Elementos de Matemática quarto volume de 1944, o autor discorre que não existe número inteiro ou fracionário, negativo ou positivo, racional ou irracional cujo quadrado seja -25 (menos 25).

A expressão $\sqrt{-25}$, é chamada, em matemática, número imaginário.

As expressões $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-10}$, etc.., enfim, as raízes quadradas de números negativos, são números imaginários.

Entretanto, $\sqrt[3]{-8}$ não é um número imaginário, porque $\sqrt[3]{-8}$ = -2. Com efeito, $(-2)^3 = -8$.

Mas a raiz quarta de um número negativo é um número imaginário, $\sqrt[4]{-16}$ é um número imaginário, porque não há um número positivo ou negativo, cuja quarta potência seja negativa. Em resumo, o número imaginário é uma raiz com índice de um número negativo.

Para se distinguirem os números imaginários dos números inteiros ou fracionários, racionais ou irracionais, positivos ou negativos tomam o nome de números reais.

Consideremos o número imaginário $\sqrt{-25}$. Transformando o radicando em

[7]Dois ângulos são complementares, quando sua soma é igual a um ângulo reto (90 graus).

um produto de dois fatores, a saber, 25 e -1, teremos:

$\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1}$ ∴ $\sqrt{-25} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = 5 * \sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$

Ora, sendo $\sqrt{-1}$ um número imaginário, é evidente que 5 $\sqrt{-1}$ é também um número imaginário. A transformação que fizemos com o número $\sqrt{-25}$, teve, por fim, isolar o número $\sqrt{-1}$. Dá-se ao número $\sqrt{-1}$, o nome de unidade imaginária.

Em matemática, a unidade imaginária é representada pela letra i: de modo que, salvo aviso em contrário, **i** significa $\sqrt{-1}$.

Um número imaginário qualquer pode sempre ser transformado de modo tal que se ponha em evidência a unidade imaginária. Por exemplo,

$3\sqrt{-16} = 3\sqrt{16(-1)} = 3*4* \sqrt{-1} = 12i$

$5\sqrt{-36} = 5\sqrt{36(-1)} = 5*6* \sqrt{-1} = 30i$

$2\sqrt{-5} = 2\sqrt{5(-1)} = 2* \sqrt{5} * \sqrt{-1} = 2i\sqrt{5}$

$4\sqrt{-50} = 4\sqrt{2 * 25(-1)} = 4*5* \sqrt{2} * \sqrt{-1} = 20i\sqrt{2}$

O quadrado da unidade imaginária é, por definição, -1, ou seja, $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

A forma normal[8] de um número complexo é a + bi, sendo **a** o número de unidades reais, e **b** o número de unidades imaginárias. Quando b = 0, o número complexo se reduz a um número real, a. Quando a=0 e b≠0, o número complexo se reduz ao que se chama um imaginário puro, isto é, bi.

Exemplo de complexos: 3+5i , 2-7i, 5+3i, etc. Exemplos de números imaginários puros: 3i, -7i, 4i.

Os números complexos aparecerão na resolução da equação de 2º grau. Inicialmente com raízes reais e a seguir, com raízes complexas (imaginárias).

O capítulo IV, referente aos números complexos, inicia-se a partir da página 110 apresentando os números imaginários, que trata como uma raiz com índice par de um número negativo.

O autor inicia o capítulo V, página 113, conceituando equação de segundo grau da seguinte maneira: “uma equação com uma incógnita é do segundo grau quando, sendo nulo um dos seus membros, o outro é do segundo grau em relação à incógnita”. Em seguida, o autor continua explicando como identificar uma equação

[8] “Forma normal” é a expressão utilizada por Jacomo Stávale. Em livros didáticos recentes, como por exemplo o livro “Contato Matemática” de Joamir Souza e Jaqueline Garcia, para o 3º ano, tem-se “forma algébrica” para designar o número complexo Z = a + bi.

completa da seguinte maneira:

1º) Um termo em que x tem expoente 2, termo este cujo coeficiente pode ser um número qualquer que, em geral, é representado pela letra a.

2º) Um termo em que x tem o expoente 1, termo este cujo coeficiente pode ser um número qualquer, representado geralmente pela letra b.

3º) Um termo em que x tem o expoente zero (portanto não contém x) termo este que é geralmente representado pela letra c, e que é chamado termo conhecido ou termo independente da incógnita.

Outro ponto relevante do texto é a apresentação do trinômio quadrado perfeito, fato que irá auxiliar na resolução das equações do 2º grau.

O autor define trinômio quadrado perfeito, na página 117, realizando a análise da expressão: $x^2 + 6x + 6$.

Para verificar se o trinômio $x^2 + 6x + 6$ é um quadrado perfeito, o autor apresenta uma sequência de análise, apresentada a seguir:

Identificação dos termos:

- No trinômio dado, temos x^2 como o quadrado do primeiro termo.
- O termo do meio é 6x, que corresponde ao duplo produto $2 \cdot x \cdot 3$.
- O termo constante é 6.

Comparação com a forma padrão do quadrado perfeito:

- A forma padrão de um quadrado perfeito é $a^2 + 2ab + b^2$, onde a e b são números reais ou variáveis.

Análise do trinômio dado:

- O trinômio $x^2 + 6x +6$ pode ser comparado com $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 6$.

Verificação da condição de quadrado perfeito:

- Para ser um quadrado perfeito, o terceiro termo do trinômio deveria ser $(3)^2 = 9$, pois é o quadrado do número que é metade do coeficiente do termo do meio (ou seja, $2 \cdot 3$).

Conclusão:

- O trinômio $x^2 + 6x + 6$ não pode ser um quadrado perfeito porque o terceiro termo não corresponde ao quadrado do coeficiente que deveria ser metade do termo do meio.

Explicação do duplo produto:

- O duplo produto $2 \cdot x \cdot 3$ indica que o terceiro termo ideal seria $(3)^2 = 9$ para que o trinômio fosse um quadrado perfeito.

● Como o terceiro termo é 6 em vez de 9, o trinômio $x^2 + 6x + 6$ não satisfaz a condição para ser um quadrado perfeito.

E na página 119, o autor exemplifica a solução de um trinômio através da Resolução direta da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja uma equação de trinômio de segundo grau.

Ex: Resolver a equação: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

$x^2 - 8x + 15 = 0$
$x^2 - 2 \times \mathbf{x} \times 4 + 15 = 0$
$x^2 - 8x = -15$
$x^2 - 8x + 16 = 16 - 15$
$(x - 4)^2 = 1$
$x - 4 = \pm 1$
$x = 4 \pm 1$

R. $\{x' = 5 \; ou \; x'' = 3\}$

desdobramos o termo do meio da equação, isto é, 8x, verificando assim que o trinômio $x^2 - 8x + 15$ não é um quadrado perfeito.

Ainda no capítulo V, intitulado "equações de segundo grau" surge a raiz quadrada de um número negativo e a oportunidade de resolvê-las utilizando os números imaginários. Stávale (p.122) resolve as equações e faz a dedução da fórmula de Bhaskara (matemático indú do século XII), da seguinte forma:

A equação é dada por: $ax^2 + bx + c = 0$
Multiplicando por 4 a: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
Passando 4ac para o segundo membro: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
Somando b^2 a ambos os membros: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros: $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Passando b para o segundo membro: $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Donde: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Os estudantes deverão verificar que:
Da equação $ax^2 - bx + c = 0$ resulta ... $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Da equação $ax^2 + bx - c = 0$ resulta ... $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$
Da equação $ax^2 - bx - c = 0$ resulta ... $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Podemos, pois, estabelecer as duas regrinhas práticas (mencionada desta forma no livro) seguintes:

Primeira: o sinal de **b** na fórmula é sempre contrário ao sinal de b na equação.

Segunda: o sinal de **4ac** na fórmula é sempre contrário ao sinal de c na equação.

Essa maneira não é usual atualmente, pois apenas uma fórmula seria suficiente para resolver qualquer equação de segundo grau. Uma mudança na maneira de apresentar / ensinar a equação do segundo grau.

O autor menciona ainda que, para facilitar o cálculo com números imaginários é necessário conhecer bem as diferentes potências das unidades imaginárias, a saber:

$i^1 = +i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = +1$

Ao resolver problemas com raízes reais e imaginárias, o discriminante, o autor utilizou o exemplo a seguir: "Calcular as dimensões de um retângulo, cuja área é de 20m², sendo a soma das mesmas dimensões igual a 8m" (Stávale, 1944, p.129) e que foi resolvido da seguinte maneira:

Representando o comprimento do retângulo por x, a largura será 8 – x, e a área será x **X** (8 – x). Logo,

$x(8 - x) = 20$

$8x - x^2 - 20 = 0$

$x^2 - 8x + 20 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16 - 20}$

$x = 4 \pm \sqrt{-4}$

Ora, afirma Jácomo, $\sqrt{-4}$ é um número imaginário; portanto as raízes da equação são:

$\{x' = 4 + \sqrt{4(-1)}\} \quad \therefore \quad \{x' = 4 + 2i\}$

$\{x'' = 4 - \sqrt{4(-1)}\} \quad \therefore \quad \{x'' = 4 - 2i\}$

Sendo números complexos, serão também chamados de raízes imaginárias. O autor ainda faz a seguinte pergunta: "quais são as dimensões do retângulo?" E a responde da seguinte maneira: "este retângulo não existe; o problema não tem solução real".

2.7 Os Números Complexos na Atualidade

Nos Parâmetros Curriculares, o ensino de números complexos foi alocado no Tema Álgebra e encontra-se no bloco dos Números e Operações, sendo parte flexível dos currículos das escolas, cabendo ao professor a decisão de empregar ou não tal conteúdo.

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (Brasil, 2006, p.122)

Na atualidade o conteúdo de Números Complexos não faz parte dos conteúdos obrigatórios do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), somente alguns vestibulares, como a FUVEST (Fundação Universitária para o Vestibular) e alguns vestibulares militares.

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos Números Complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física, Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais.(LIMA, 1991, p.01)

A aprendizagem de matemática, incluindo os números complexos, deve estar conectada à compreensão de significados e à construção de relações entre os conceitos matemáticos e situações de problemas do cotidiano. Os números complexos, por exemplo, têm aplicações práticas em áreas como engenharia e física, mostrando sua relevância no mundo real. Portanto, um problema não deve ser analisado de forma isolada, pois possui múltiplas dimensões. (VASSALO NETO, 2013, p.3).

Ainda encontram-se Números Complexos em livros didáticos atuais, definidos como uma raiz com índice par de um número negativo, pois é um assunto que, apesar de “opcional”, ainda aparece em questões de vestibulares concorridos. Além disso, possui aplicações em algumas áreas de cursos superiores.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa encontramos um autor que, em seus livros didáticos, define números complexos de maneiras diferentes, trata-se de Jácomo Stávale em suas obras “Primeiro Ano de Matemática” (1941) e “Elementos de Matemática” (1944).

No volume 1, de 1941, os números complexos são apresentados como um número constituído por unidades de espécies diferentes, porém da mesma natureza. Uma definição semelhante é apresentada no livro “Matemática (Aritmetica)” – 1º ano propedêutico, dos autores Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio, publicado em 1939.

Na obra de 1944, volume 4, de Jácomo Stávale, os números complexos se tratam de uma raiz com índice par de um número negativo. E essa definição aparece como o início do estudo desses números também em livros didáticos atuais, como no volume 3 do “Contato Matemática” dos autores Joamir Souza e Jaqueline Garcia, de 2016, utilizado no Campus de Jaraguá do Sul, centro, do Instituto Federal de Santa Catarina.

No entanto, a definição de ser constituído por unidades de espécies diferentes, porém da mesma natureza entra em desuso, seja por obsolescência, como é o exemplo da moeda inglesa e sua reforma em 1971, seja por ser possível resolver operações com esses números utilizando-se de Regra de Três.

Quanto ao fato de ser uma raiz com índice par de um número negativo, definição ainda utilizada atualmente, condiz com o surgimento desses números e pertencente tanto a História da Matemática quanto ao da História do Ensino da Matemática.

O uso do termo “número complexo” aparece desde o século XIX (ZUIN, 2008) nos livros didáticos e chega, pelo menos, até a década de 1940, quando aparece em conjunto com a definição de números complexos como sendo a raiz de índice par de um número negativo na mesma obra de Jácomo Stávale,.

O autor Jácomo Stávale não alerta, em seus livros, para a existência de duas definições diferentes para números complexos. Algo que, aparentemente, não causou uma confusão ou dificuldade a mais. Além disso, esse autor não se preocupa em, na mesma obra didática, apesar de volumes diferentes, comentar ou destacar a existência do número complexo com mais de um significado. Provavelmente, as séries diferentes e os contextos em que são ensinados são suficientes, para o autor, para não deixar dúvidas de qual conceito é utilizado.

Fatos relacionados ao aparecimento do número complexo como um número constituído por unidades de espécies diferentes, porém da mesma natureza, ainda merecem ser investigados. Uma sugestão para a continuidade dessa pesquisa.

Na atualidade, os números complexos constam nos Parâmetros Curriculares como uma parte flexível dos currículos das escolas e ainda estão presentes em alguns vestibulares pelo país, mas não fazem parte dos conteúdos obrigatórios do ENEM.

REFERÊNCIAS

BENTLEY, Peter. **O livro dos Números**: Uma história ilustrada da matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed, 2009.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. 2006 Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

CALIOLI, Carlos: D'AMBROSIO Nicolau**. Matemática:** Aritmética. Volume 17. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1939.

CAFÉ, L.; MÁRDERO ARELLANO, M. A.; BARBOZA, E. M. F.; MELO, B. A.; NUNES,E. M. A. Repositórios Institucionais: nova estratégia de publicação científica na rede. In: ENDOCOM, 13, Belo Horizonte, MG, set.2003. Anais. Belo Horizonte: 2003.

COSTA, D. D. A. da, & ARRUDA, D. J. P. de. (2022). Sessão 5: REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DE FONTES PARA A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. *Anais Do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática*, p. 1-10. Disponível em: **https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/15036**

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias,** Rio de Janeiro: SBM Coleção do Professor de Matemática, 6ª edição. 2012

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jaqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática**, 3º ano, 1ª edição, São Paulo: FTD, 2016.

STÁVALE, Jácomo. **Primeiro Ano de Matemática**, vol. 12 da 2a série da Biblioteca Pedagógica Brasileira, 17ª Edição, 1941. Companhia Editora Nacional.

STÁVALE, Jácomo. **Elementos de matemática**, vol. 1, 3ª Edição, 1943. Companhia Editora Nacional.

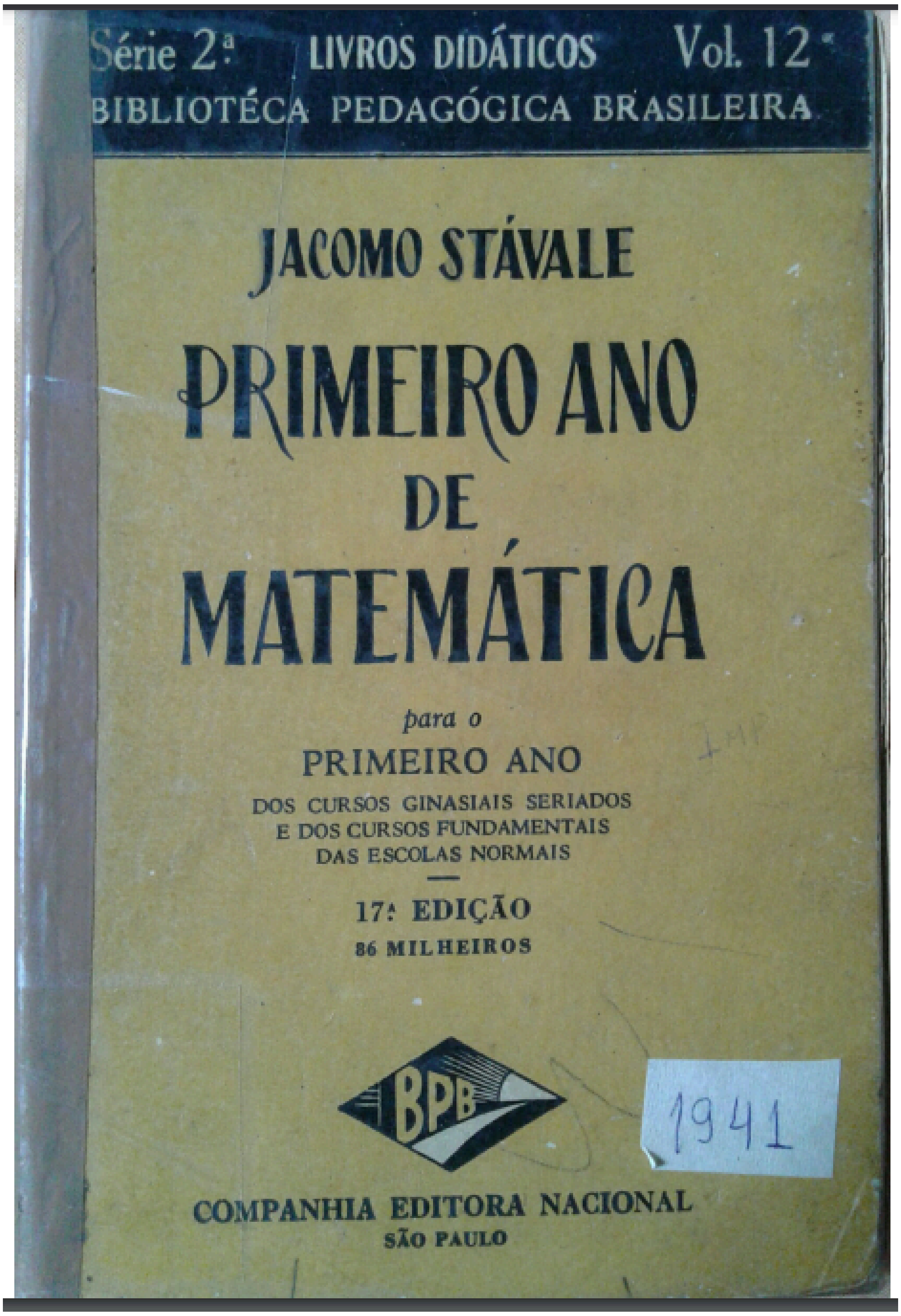
STÁVALE, Jácomo. **Elementos de Matemática**, vol 4, 4ª série, 3ª Edição de 1944. Companhia Editora Nacional.

TRIPOLI, Taluza Alves. **A Matemática escolar no início do século XX**: uma análise de livros didáticos da década de 1930. Monografia apresentada à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade do Sagrado Coração. Bauru 2005 Disponível em https://www.stavale.com/monografia_jacomo_stavale.pdf. Acesso em 22 de julho de 2024.

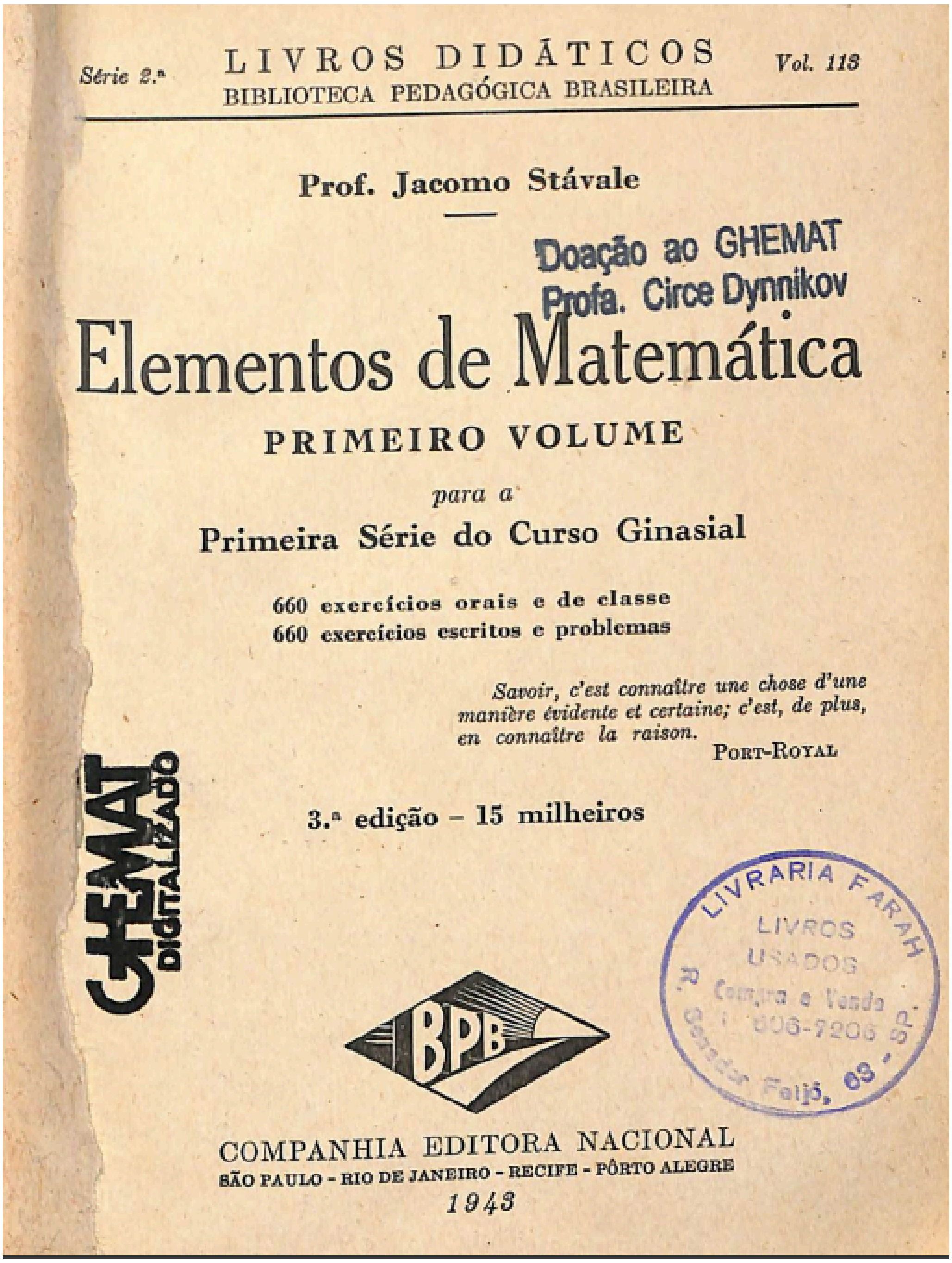
VASSALO NETO, Rafael. O ensino de números complexos. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ISSN 2178–034X. Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho de 2013.

ZUIN, E. de S. L. **Alterações na aritmética escolar do Brasil Oitocentista**: entre os pesos e medidas. Anais do Congresso Brasileiro de História da Educação. Aracaju - SE, 2008. Disponível em: <www.sbhe.org.br/novo/congresso/cbhe_2008/pdf/85.pdf >.

ANEXO A – Capa do livro Primeiro ano de Matemática (1941)



ANEXO B – Frontispício do livro didático Elementos de Matemática, v.1, 1943



Série 2.ª LIVROS DIDÁTICOS Vol. 113

BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

PRIMEIRO VOLUME

para a

Primeira Série do Curso Ginasial

660 exercícios orais e de classe
660 exercícios escritos e problemas

Savoir, c'est connaître une chose d'une manière évidente et certaine; c'est, de plus, en connaître la raison.

PORT-ROYAL

3.ª edição – 15 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - PÔRTO ALEGRE

1943

ANEXO C – Frontispício do livro didático Elementos de Matemática, v.4, 1944

SÉRIE 2.ª | LIVROS DIDÁTICOS | VOL. 136

BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

QUARTO VOLUME

para a

Quarta Série do Curso Ginasial

280 exercícios orais e de classe
1 400 exercícios escritos e problemas

A Matemática é um dos mais elevados exercícios do espírito, e o instrumento mais eficaz para o progresso mental e moral do homem.

H. WIELEITNER

3.ª edição — 15 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - BAÍA - RECIFE - PÔRTO ALEGRE

1 9 4 4