

CÁLCULO FRACIONÁRIO APLICADO À CINÉTICA DE SECAGEM: COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES NÚCLEOS DE MEMÓRIA E MODELOS TRADICIONAIS

Gabriel França Lunkes¹

Gustavo Henrique Santos Flores Ponce²

Ailton Durigon³

Resumo: O cálculo fracionário é uma área da matemática que generaliza os operadores integrais e diferenciais para ordem não inteira. Existem diversas definições de derivadas fracionárias e cada uma está relacionada a um núcleo de memória, oferecendo diversidade para modelagem de fenômenos com diferentes graus de memória. O presente estudo teve objetivo de comparar os modelos fracionários desenvolvidos para cinética de secagem de camada fina com os modelos de Lewis e Page. Validou-se o algoritmo de otimização através de estudo da literatura. Comparou-se os modelos fracionários dos operadores de Caputo, Caputo-Fabrizio e Atangana-Baleanu entre si, onde o primeiro apresentou a maior frequência de melhor desempenho e menor variabilidade dos erros para um conjunto de 52 curvas de cinética de secagem de diferentes fontes da literatura, indicando que a secagem possui memória tipo potência. Ao comparar Caputo com Page, ficou evidente que a melhor modelagem dependia do produto a ser analisado junto às condições operacionais. Através da análise gráfica e propriedades da função de Mittag-Leffler, foi possível identificar que as curvas melhor modeladas por Caputo possuíam comportamento inicial próximo ao modelo ideal e cauda longa. Os parâmetros dos modelos de Caputo e Page apresentaram relação consistente com a mudança de temperatura e velocidade do ar de secagem. As análises realizadas neste estudo mostram que os modelos fracionários podem ganhar em modelagem como também em interpretação física consistente do fenômeno. Estudos futuros podem trazer formas funcionais dos parâmetros variando com condições experimentais e análise de derivadas de ordem variável.

Palavras-Chave: Caputo. Caputo-Fabrizio. Atangana-Baleanu. Dependência paramétrica. Efeitos de Memória.

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática consiste em representar um fenômeno através de equações, funções ou expressões matemáticas que permitam descrever/simular de forma mais fidedigna a realidade. Muitas vezes, em processos de engenharia, incluindo engenharia química, opta-se por usar modelos simplificados que representam o sistema físico de forma satisfatória, incluindo aproximações grosseiras, que funcionam bem para sistemas simples (Chicote, 2025). Entretanto, quando se trata de sistemas mais complexos, esses modelos simplificados demais começam a apresentar falhas crônicas, sendo assim, é imprescindível, buscar novos

¹ Acadêmico(a) do curso de Engenharia Química do Instituto Federal de Santa Catarina – Câmpus Lages; gabrielflunkes0502@gmail.com

² Orientador(a) - Docente do curso de Engenharia Química do Instituto Federal de Santa Catarina – Câmpus Lages; gustavo.ponce@ifsc.edu.br

³ Coorientador(a) - Docente do curso de Engenharia Química do Instituto Federal de Santa Catarina – Câmpus Lages; ailton.durigon@ifsc.edu.br

modelos que possam representar aqueles sistemas de forma apropriada.

O cálculo diferencial e integral de ordem não inteira (também conhecido como cálculo fracionário) é uma extensão do cálculo diferencial e integral clássico, que consiste de aplicações de derivadas e integrais, onde a ordem desses operadores não é um número inteiro, ou seja, pode ser uma ordem real ou até mesmo complexa (Patnaik; Hollkamp; Semperlotti, 2020).

Apesar da ideia do conceito ser antiga, as aplicações começaram a surgir mais recentemente, principalmente depois do surgimento das principais ideias para a interpretação física do conceito desses operadores (Machado *et al.*, 2009). A interpretação consiste em descrever efeitos de memória de sistemas, onde todo o histórico do fenômeno influencia no tempo presente, ou a não-localidade de um sistema, onde, há a influência dos infinitos pontos da função quando se aplica o operador diferencial (Andrade; Lima; Dartora, 2018).

Deve-se ressaltar que não há uma definição única de derivada fracionária, e cada definição pode ser avaliada individualmente nos fenômenos para entender qual operador diferencial irá melhor descrevê-los (Bhangale; Kachhia, 2022). Essa divergência está ligada à construção do operador, podendo-se construir diversas definições com diferentes núcleos de memória, também chamado de kernels (Odibat, 2026).

Uma das aplicações do cálculo fracionário, através de equações diferenciais fracionárias (EDFs), com maior número de estudos é a difusão anômala, também chamada de transporte não-fickiano (Patnaik; Hollkamp; Semperlotti, 2020). A ideia está justamente na difusão de massa em meios complexos que não seguem a lei de Fick, apresentando efeitos não-locais e de memória (Matias *et al.*, 2023).

A operação unitária de secagem, na qual um material é seco através da passagem do ar quente objetivando retirar a umidade, envolve fenômenos de transferência de massa (Tadini *et al.*, 2019). A cinética de secagem envolve experimentos que tenham a função de descrever o teor de umidade do material ao longo do tempo, e diversos modelos foram criados para descrever esse fenômeno. Alguns desses modelos envolvem equações diferenciais ordinárias (EDOs), como é o caso do modelo de Lewis, e outros envolvem parâmetros empíricos, como é o caso do modelo de Page, sendo o mais tradicional para descrever o fenômeno (Carlesso *et al.*, 2005).

O grande problema das relações empíricas é que apesar de possuírem boas modelagens, não existe interpretação física atrelado ao modelo, e cada caso tem que ser avaliado individualmente. Considerando isso, alguns estudos da literatura tentaram aplicar a derivada fracionária de Caputo em dados experimentais para descrever a cinética de secagem de alguns materiais, visando proporcionar uma melhor interpretação física do fenômeno (Ferrari, 2023) (Nicolin *et al.*, 2018).

Entretanto, não há estudos presentes na literatura que avaliem definições diferentes de derivadas fracionárias a um grande conjunto de dados e diversos produtos, além da falta de relação com as condições operacionais como a temperatura e velocidade do ar de secagem.

Portanto, o presente estudo tem como objetivo principal comparar modelos fracionários desenvolvidos de forma independente para a cinética de secagem com os modelos de Lewis e Page, considerando dados experimentais de diversos estudos da literatura e produtos. Alguns objetivos específicos são: desenvolver modelos fracionários de forma independente considerando as derivadas de Caputo, Caputo-Fabrizio e Atangana-Baleanu; validar algoritmo de otimização de parâmetros dos modelos; comparar os modelos fracionários entre si através de métricas

estatísticas; confrontar o melhor modelo fracionário aos modelos tradicionais de secagem, visando interpretações físicas; relacionar os parâmetros dos melhores modelos em função da temperatura e velocidade do ar de secagem.

2 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho compreendeu a obtenção dos dados experimentais de secagem da literatura científica, através de critérios de seleção. Os conjuntos de dados foram submetidos a modelos tradicionais de secagem e modelos fracionários desenvolvidos de forma independente. Foi desenvolvido um algoritmo para a otimização dos parâmetros dos modelos e sua respectiva validação. A avaliação dos modelos foi conduzida através de métricas estatísticas e análise gráfica, bem como, os parâmetros dos modelos foram relacionados a condições operacionais.

2.1 Dados experimentais de secagem da literatura

O presente estudo não se limitou a um pequeno conjunto de dados experimentais, pois este consistiu de uma análise em larga escala, a fim de encontrar padrões globais. Por isso, houve a seleção de vários artigos da literatura científica, de diversos produtos diferentes submetidos à secagem, abrangendo distintas condições operacionais de processo. Ao todo, foram avaliadas 52 curvas de cinética de secagem, de 6 produtos diferentes.

Devido à forma de disponibilização usual desses dados na literatura de secagem, as curvas experimentais foram obtidas diretamente a partir dos gráficos apresentados nos trabalhos originais, através da digitalização dos pontos utilizando o software WebPlotDigitizer (versão 5; Rohatgi, 2024), um procedimento metodológico respaldado pela literatura quanto à sua precisão (Drevon; Fursa; Malcolm, 2017), uma vez que os valores numéricos normalmente não são fornecidos em formato tabular. Os conjuntos de dados analisados apresentaram heterogeneidade quanto ao número de pontos experimentais, nível de dispersão dos dados e disponibilidade de informações operacionais, sendo que, em diversos casos, parâmetros como velocidade do ar, teor de umidade inicial e de equilíbrio não eram reportados pelos autores.

Além disso, parte dos estudos disponibiliza múltiplas curvas experimentais sob diferentes condições, tendo sido selecionados apenas os conjuntos para as análises comparativas desenvolvidas no presente trabalho, especialmente aquelas relacionadas à avaliação da influência de variáveis operacionais sobre os parâmetros dos modelos fracionários. Ainda assim, foram mantidos conjuntos de dados com diferentes níveis de complexidade experimental, desde que apresentassem comportamento fisicamente coerente para aplicação dos procedimentos de modelagem e ajuste numérico empregados.

Na Tabela 1 é possível observar um resumo de todos os dados experimentais usados, separados por produtos, autores, e condições experimentais. O mesmo produto para dois autores diferentes foram tratados com índices diferentes para identificação posterior.

Tabela 1 - Dados experimentais da literatura científica usados na modelagem

Autores	Produtos	Nº de Curvas	Condições Experimentais
(Keneni; Hvoslef-Eide; Marchetti, 2019)	Pinhão-manso A	5	T = 313, 323, 333, 343 e 353 K (sementes trituradas)
(Hacıhafizoğlu <i>et al.</i> 2009)	Milho	7	T = 40, 50, 60 e 70°C
(Babalís <i>et al.</i> 2006)	Figo	12	T = 55, 65, 75 e 85°C, em v = 3, 1 e 0,5 m/s
(Kashaninejad <i>et al.</i> 2007)	Pistache	4	T = 25, 40, 55 e 70°C, v = 1,5 m/s, e U.R. = 5%
(Bhong; Kale, 2019)	Cebola	8	T = 50 e 60°C em v = 2, 3,6, 5,7 e 7,7 m/s
(Khatchatourian, 2012)	Soja	13	T = 70°C, v = 0,9 m/s e $x_0 = 0,13, 0,22$ e 0,32 b.s.
			T = 70°C, v = 0,12, 0,5, 0,9 e 1,5 m/s e $x_0 = 0,538$ b.s.
			T = 70°C, v = 0, 0,12, 0,24, 0,49, 1 e 2 m/s e $x_0 = 0,162$ b.s.
(Subroto, 2015)	Pinhão-manso B	3	T = 50°C em v = 397, 794 e 1190 cm/min

Nota: T = temperatura do ar de secagem; v = velocidade do ar de secagem; x_0 = teor de umidade inicial; b.s. = base seca; U.R. = umidade relativa do ar.

Fonte: Elaboração própria (2026)

2.2 Modelos tradicionais de secagem

Nesta seção serão apresentados os dois modelos mais comuns nas modelagens de curvas de cinética de secagem.

2.2.1 Modelo de Lewis

O modelo de Lewis, também chamado de Modelo de Newton, é uma equação semi-empírica desenvolvida para a cinética de secagem em camada fina, que vem de um balanço de massa transiente apresentando a simplificação da constante de secagem (k) ser constante durante o processo. A estrutura da equação diferencial ordinária (EDO) faz uma analogia à lei do resfriamento de Newton (Carlesso *et al.*, 2005).

O termo camada fina (*thin layer*) se refere a cinética onde o produto é disposto em uma espessura delimitada (tipicamente próximo de 20 cm para materiais granulares) sobre a camada, sendo assim, condições operacionais como temperatura e velocidade do ar de secagem podem ser tratadas como constantes dentro do equipamento de secagem (Brooker; Bakker-Arkema; Hall, 1992).

A forma diferencial do modelo de Lewis, ou seja, a EDO, é expressa na

Equação 2.1, relacionando a taxa do teor de umidade com o oposto da constante de secagem e a diferença entre o teor de umidade atual e o de equilíbrio (Lewis, 1921).

$$\frac{dx(t)}{dt} = -k(x(t) - x_{eq}) \quad (2.1)$$

Onde $x(t)$ é a teor de umidade ao longo do tempo, em b.s. (base seca), k é a constante de secagem, em s^{-1} , e x_{eq} é o teor de umidade de equilíbrio, também em b.s. A forma integral desta equação é uma função exponencial decrescente, como pode ser vista na Equação 2.2 (Carlesso *et al.*, 2005):

$$x(t) = (x_0 - x_{eq})e^{-kt} + x_{eq} \quad (2.2)$$

Onde x_0 é o teor de umidade inicial, também em b.s. Convenientemente a literatura apresenta os dados com normalização da equação através da razão de umidade (*Moisture Ratio* ou MR). Essa medida é adimensional e representada na Equação 2.3 (Bhong; Kale, 2019):

$$MR = \frac{x(t) - x_{eq}}{x_0 - x_{eq}} \quad (2.3)$$

Com isso, a forma integral do modelo de Lewis assume a configuração descrita na Equação 2.4:

$$MR(t) = e^{-kt} \quad (2.4)$$

Esse modelo é considerado o mais simples de se representar a cinética de secagem. Normalmente, quando há bons ajustes, a indicação é a de que a resistência externa à transferência de massa domina o processo (Lewis, 1921).

2.2.2 Modelo de Page

O modelo de Page foi construído para ajustar a característica de exponencial pura do modelo de Lewis. Para isso houve a introdução de um parâmetro puramente empírico para permitir que a exponencial se “esticasse” no tempo, assim como o próprio modelo é conhecido na matemática como exponencial esticada (Johnston, 2006). O parâmetro em questão é chamado de expoente de secagem (n), ou expoente de Page, sendo um parâmetro adimensional (Onwude *et al.*, 2016).

O modelo de Page, considerando a normalização da MR, pode ser observado na Equação 2.5 (Kenení; Hvorslev-Eide; Marchetti, 2019):

$$MR(t) = e^{-kt^n} \quad (2.5)$$

O modelo é considerado um dos mais bem sucedidos modelos que representam a cinética de secagem. Isso pode estar relacionado à característica da exponencial esticada, cuja forma é modificada pelo parâmetro n , permitindo representar diferentes curvaturas da cinética e, conseqüentemente, diferentes comportamentos da taxa de secagem (Berberan-Santos; Bodunov; Valeur, 2005).

2.3 Desenvolvimento de modelos com operadores fracionários

Muitos estudos já aplicaram o cálculo fracionário para generalizar as EDOs clássicas. O estudo de Bhangale e Kachhia (2022), aplicaram diversas definições de operadores fracionários na lei do resfriamento de Newton. Essa equação tem estrutura matemática semelhante à do modelo de Lewis de secagem, e, com base nisso, é possível generalizar esse modelo para ordens fracionárias, com a utilização de diferentes operadores. A estrutura do modelo de Lewis generalizado, considerando uma derivada fracionária arbitrária, pode ser visto na Equação 2.6:

$$D_{\alpha}^t x(t) = -k^{\alpha} (x(t) - x_{eq}) \quad (2.6)$$

Onde D_{α}^t é o operador diferencial fracionário arbitrário, que irá depender da estrutura de um operador específico, e a resolução da equação irá depender da transformada de Laplace do operador em questão. Já α é a ordem da derivada fracionária, que, para fenômenos subdifusivos, assume a faixa: $0 < \alpha < 1$ (Patnaik; Hollkamp; Semperlotti, 2020).

Para fins de simplificação notacional e consistência com as representações adotadas nos gráficos e tabelas, a constante de secagem fracionária será denotada simplesmente por k , subentendendo-se que sua unidade é $[tempo]^{-\alpha}$ e que ele corresponde ao termo k^{α} da formulação teórica. Esta escolha não altera a estrutura matemática do modelo, apenas unifica a nomenclatura para facilitar a apresentação dos resultados.

2.3.1 Modelo de Caputo

O operador diferencial de Caputo é um dos operadores fracionários mais utilizados em modelagem de fenômenos de engenharia, pelo simples fato de que permite a utilização de condições iniciais para a resolução das equações diferenciais fracionárias (EDFs).

Chama-se de família de operadores de Caputo, aqueles que apresentam a estrutura principal do operador, apenas trocando-se o kernel da definição, alterando assim o grau de memória (Odibat, 2026).

A aplicação do operador fracionário de Caputo na cinética de secagem já é amplamente reportada na literatura (Granello, 2026). Entretanto, sua aplicação a um grande conjunto de dados, considerando critérios globais de ajuste e variação dos parâmetros do modelo em função das condições operacionais, ainda não foi explorada.

Para validar a consistência com a literatura, foi desenvolvido de forma independente a solução da Equação 2.6, considerando a derivada de Caputo, e seu resultado comparado com a literatura.

Na Equação 2.7 está a forma funcional do operador diferencial de Caputo (Godínez *et al.*, 2015):

$${}_c D_a^t f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(s)}{ds^n} ds \quad (2.7)$$

Onde ${}_c D_a^t$ é o operador diferencial de Caputo, e Γ é a função gama, generalização dos números fatoriais (Mendonça *et al.*, 2022). A função potência que acompanha a n -ésima derivada da função dentro da integral é o kernel da derivada de Caputo, o que lhe confere uma memória do tipo potência (Andrade; Lima; Dartora, 2018).

Vale ressaltar que a derivada de Caputo utiliza o conceito de integral de Riemann-Liouville para sua formulação. Para mais detalhes da construção e primórdios do cálculo de ordem não inteira, pode-se consultar o estudo de Junior (2023).

A transformada de Laplace do operador diferencial de Caputo é expressa na Equação 2.8 (Ferreira, 2024):

$$\mathcal{L}\{ {}_c D_a^t(f(t)) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0) \quad (2.8)$$

Ao se resolver uma EDF de forma analítica, as soluções normalmente apresentam a função de Mittag-Leffler, uma generalização da exponencial para o cálculo fracionário. A forma da função de Mittag-Leffler de um parâmetro pode ser vista na Equação 2.9 (Podlubny *et al.*, 2009):

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (2.9)$$

2.3.2 Modelo de Caputo-Fabrizio

A aplicação do operador diferencial de Caputo-Fabrizio na cinética de secagem somente foi reportada pelo estudo de Ercan (2025), entretanto o desenvolvimento do presente estudo foi feito de forma independente, utilizando como base o estudo de Bhangale e Kachhia (2022). Esse desenvolvimento independente teve o objetivo de validar a solução da literatura, comparando justamente com a solução feita no presente estudo.

A Equação 2.10 apresenta o operador diferencial de Caputo-Fabrizio, que considera o kernel uma função exponencial, o que lhe confere uma memória curta (Caputo; Fabrizio, 2015).

$${}_{cFC} D_t^\alpha(f(t)) = \frac{M(\alpha)}{n-\alpha} \int_0^t \frac{d^n(f(\tau))}{d\tau^n} e^{\left(\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right)} d\tau \quad (2.10)$$

Onde $M(\alpha)$ é um parâmetro de normalização, que tem a forma funcional arbitrária, mas deve considerar duas propriedades para se reduzir a derivadas de ordem inteira padrão dentro dos limites do parâmetro α . A forma adotada no presente estudo é $M(\alpha) = 1$, o que é amplamente aceito na literatura (Caputo; Fabrizio, 2015). A transformada de Laplace do operador diferencial de Caputo-Fabrizio é expresso na Equação 2.11 (Caputo; Fabrizio, 2015):

$$\mathcal{L}\{ {}_{CFC}D_t^\alpha(f(t)) \} = \frac{s^{n+1}F(s) - s^n f(0) - s^{n-1}f'(0) - \dots - f^{(n)}(0)}{s + \alpha(1-s)} \quad (2.11)$$

2.3.3 Modelo de Atangana-Baleanu

O modelo de Atangana-Baleanu, aplicado a cinética de secagem, foi desenvolvido de forma independente neste estudo (apesar de reportado por Ercan (2025)). A equação final originalmente diverge do estudo da literatura, indicando resoluções diferentes. Por isso, o desenvolvimento aqui apresentado, configura-se como uma contribuição original.

A Equação 2.12, portanto, apresenta o operador diferencial de Atangana-Baleanu, que considera o kernel uma função de Mittag-Leffler, o que lhe confere uma memória longa quando comparada a de Caputo (Atangana; Baleanu, 2016).

$${}_{ABC}D_t^\alpha(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \frac{d^n(f(\tau))}{d\tau^n} E_\alpha\left(\frac{-\alpha(t-\tau)^\alpha}{n-\alpha}\right) d\tau \quad (2.12)$$

Onde $B(\alpha)$ é um parâmetro de normalização, como no caso de Caputo-Fabrizio, mas a forma funcional difere. A forma adotada aqui é com base na função gama, expressa por $B(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ reportada na literatura. A transformada de Laplace do operador diferencial de Atangana-Baleanu é expresso na Equação 2.13 (Atangana; Baleanu, 2016):

$$\mathcal{L}\{ {}_{ABC}D_t^\alpha(f(t)) \} = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \left[\frac{s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \right], \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.13)$$

2.4 Algoritmo de otimização dos parâmetros dos modelos e validação

Os parâmetros dos modelos matemáticos foram ajustados via regressão não-linear a partir dos dados experimentais. O procedimento de ajuste foi realizado com a linguagem de programação *Python* utilizando a rotina de otimização numérica *curve_fit* da biblioteca do *Scipy*. Foram impostos limites dos parâmetros para condições impossíveis e melhor conversão do algoritmo. Além disso, utilizou-se da biblioteca *pymittagleffler* para implementação da respectiva função. A utilização da linguagem *Python* se deve ao fato de ser uma plataforma aberta e amplamente

empregada em computação científica (Virtanen *et al.*, 2020).

Para validar o algoritmo utilizado, empregou-se a reprodução dos resultados obtidos pelo estudo de Ferrari (2023), que empregaram ambiente *MATLAB* para otimização dos parâmetros dos modelos aplicados à cinética de secagem. Os resultados de três curvas distintas foram confrontados, comparando-se os parâmetros dos modelos de Caputo, Lewis e Page através do erro relativo percentual, assim como os valores do coeficiente de determinação (Rajamanickam *et al.*, 2021) de cada modelo através de um recálculo dos dados experimentais.

2.5 Procedimento de comparação entre modelos

Inicialmente, avaliou-se se algum modelo fracionário proposto teve melhor desempenho global dos dados. Para tanto, foram utilizadas duas métricas estatísticas comuns na literatura de secagem. Devido a dificuldade de realizar triplicatas em experimentos de cinética de secagem, a literatura normalmente apresenta somente as medidas de erro absoluto e qualidade de ajuste (Erbay; Icier, 2010).

As duas métricas ajustadas para comparação entre os modelos implementados foram o coeficiente de determinação (R^2), e raiz do erro quadrado médio (root mean squared error, $RMSE$). Enquanto o primeiro está relacionado à qualidade do ajuste, o segundo apresenta uma medida de erro absoluto, complementando-se na análise. A Equação 2.14 e a Equação 2.15 apresentam como o cálculo das métricas R^2 e $RMSE$ foram realizados, respectivamente (Rajamanickam *et al.*, 2021):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_{i,exp} - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_{i,exp} - y_{i,med})^2} \quad (2.14)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{i,exp} - y_i)^2} \quad (2.15)$$

Onde $y_{i,exp}$ é o valor experimental, y_i é o valor estimado pelo modelo avaliado, $y_{i,med}$ é a média dos valores experimentais, e n é o número de pontos experimentais.

Com base nessas métricas é possível comparar o desempenho dos modelos fracionários. Para cada curva, considera-se o melhor desempenho o modelo que apresentou o menor $RMSE$ e o maior R^2 simultaneamente. Ao analisar todas as 52 curvas, pode-se identificar qual modelo apresenta melhor desempenho global, ou seja, aquele que foi superior na maior frequência de curvas analisadas.

Para uma análise de variabilidade de erros e ajuste dos modelos utilizou-se da distribuição dos $RMSE$, para identificar se o modelo com a frequência de desempenho maior, possui a menor distribuição de erros.

Após avaliar o modelo fracionário com o melhor desempenho, utilizou-se do melhor modelo fracionário para compará-lo com os modelos de Lewis e Page. A

comparação também seguiu a frequência de melhor desempenho e a variabilidade de erros, mas o foco se tornou a análise por produto, pelas características apresentadas pelos resultados.

Na análise posterior seguiu-se para a estrutura interna dos produtos e análise gráfica, utilizando-se das propriedades da função de Mittag-Leffler para tanto. A primeira propriedade se refere ao comportamento da função em tempos iniciais: quando o tempo tende a zero podemos truncar a série nos dois primeiros termos, obtendo-se a Equação 2.16 (Mainardi, 2020):

$$E_{\alpha}(-kt^{\alpha}) \approx 1 - \frac{kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, t \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Uma relação linear em relação a t^{α} . Para $0 < \alpha < 1$ o termo dominante t^{α} produz um afastamento inicial mais rápido do valor inicial quando comparado ao termo linear t .

Já a segunda propriedade utilizada refere-se ao comportamento em tempos grandes, quando o tempo tende ao infinito, a expansão assintótica da função de Mittag-Leffler assume a forma apresentada na Equação 2.17 (Mainardi, 2020):

$$E_{\alpha}(-kt^{\alpha}) \sim \frac{1}{k\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}, t \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

A expressão mostra que para tempos grandes a função apresenta uma cauda longa, ou seja, há uma mudança suave das condições ao longo do tempo, isso se reflete como um fenômeno de memória, onde o passado interfere criando esse padrão (Podlubny *et al.*, 2009).

Foram apresentados alguns casos representativos do conjunto de dados experimentais gerais, sendo que os parâmetros obtidos pelo algoritmo de otimização para construção das curvas através dos dados experimentais estão disponíveis no Apêndice A, além das métricas estatísticas dos modelos.

Após a obtenção dos parâmetros e a avaliação de desempenho dos modelos, investigou-se a possível relação entre condições operacionais e os parâmetros de secagem, focando-se nos modelos que apresentaram, de forma consistente, o melhor desempenho entre aqueles analisados. A análise teve como foco principal a temperatura e a velocidade do ar de secagem por serem as variáveis mais frequentemente reportadas na literatura (Kucuk *et al.*, 2014).

Para que a análise fosse fidedigna, avaliou-se um conjunto de dados que mantivesse as mesmas condições e somente variasse a temperatura, podendo inferir que a mudança somente poderia estar ligada a isso (da mesma forma procedeu-se para a análise da velocidade do ar). Além disso, buscou-se estudos que apresentassem diversas condições operacionais diferentes.

Contudo, é importante destacar que estudos de secagem que avaliem sistematicamente o efeito de uma variável mantendo todas as outras constantes são raros na literatura de secagem. Frequentemente, as pesquisas variam apenas uma condição operacional, sem controle adequado das demais. Além disso, mesmo quando há variação controlada de um único parâmetro, o número de curvas avaliadas raramente ultrapassam três (Kucuk *et al.*, 2014).

Dessa forma, foram selecionados os conjuntos de dados mais adequados para a investigação de possíveis relações entre os parâmetros ajustados e as condições operacionais. A análise concentrou-se principalmente nos parâmetros característicos dos modelos avaliados, buscando verificar se alterações das condições operacionais eram acompanhadas por mudanças sistemáticas em seus valores.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção avalia o desempenho de modelos fracionários aplicados a cinética de secagem com base em dados retirados da literatura. No primeiro momento são apresentadas as soluções analíticas e a validação do procedimento de estimativa de parâmetros. Em seguida, avalia-se qual modelo fracionário é superior, confrontando este com os modelos tradicionais de secagem, considerando também condições operacionais e interpretações físicas associadas à estrutura dos produtos submetidos a secagem.

3.1 Solução analítica das EDFs de secagem

Para a Equação 2.6, considerando a derivada de Caputo dada a Equação 2.7, aplica-se a transformada de Laplace em ambos os lados da igualdade. Usando a transformada da derivada de Caputo, conforme a Equação 2.8, as transformadas comuns (Zill, 2016), e tomando $x(0) = x_0$, obtém-se:

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0 = -kX(s) + \frac{k x_{eq}}{s}$$

Isolando-se o $X(s)$ na expressão acima e utilizando o método de frações parciais (Zill, 2016), obtém-se:

$$X(s) = \frac{x_{eq}}{s} + (x_0 - x_{eq}) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}$$

O uso da transformada inversa de Laplace com a transformada da função de Mittag-Leffler (Mainardi, 2020) conduz a mesma expressão encontrada por Ferrari (2023):

$$x(t) = (x_0 - x_{eq}) E_\alpha(-kt^\alpha) + x_{eq}$$

A expressão está de acordo com a literatura e apresenta o teor de umidade ao longo do tempo, sendo muito utilizada a variável adimensional razão de umidade (MR), descrita previamente pela Equação 2.3. Ao aplicar essa normalização, chega-se em:

$$MR = E_\alpha(-kt^\alpha) \quad (3.1)$$

Já para Equação 2.6, considerando a derivada de Caputo-Fabrizio descrita na Equação 2.10, pode-se seguir o mesmo procedimento de aplicação da transformada e, utilizando-se da Equação 2.11, obtém-se:

$$\frac{sX(s) - x_0}{s + \alpha(1-s)} = -kX(s) + \frac{kx_{eq}}{s}$$

Novamente consegue-se isolar $X(s)$ e utilizar o método de frações parciais, além da transformada inversa de Laplace de algumas funções elementares, obtendo-se assim a Equação 3.2, já com a variável normalizada:

$$MR = e^{\frac{-\alpha k}{1+k(1-\alpha)}t} \quad (3.2)$$

Percebe-se que diferente da Equação 3.1, essa solução apresenta uma função exponencial no lugar da função de Mittag-Leffler, isso se deve ao fato de que o núcleo de memória da derivada de Caputo-Fabrizio ser de memória curta, muito próximo ao comportamento de uma derivada de ordem inteira (Caputo; Fabrizio, 2015). O estudo de Ercan (2025) chegou ao mesmo resultado, validando-se a presente resolução.

Em seguida, assume-se a Equação 2.6 considerando a derivada de Atangana-Baleanu descrita na Equação 2.12. Utilizando-se dos mesmos procedimentos anteriores e usando-se da Equação 2.13, obtém-se:

$$\frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)} \frac{(s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0)}{(s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha})} = -kX(s) + \frac{kx_{eq}}{s}$$

Ao isolar o $X(s)$ para posterior utilização do método de frações parciais, chega-se em:

$$X(s) = \frac{B(\alpha)x_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha(B(\alpha)+k(1-\alpha))+k\alpha} + \frac{kx_{eq}(1-\alpha)s^{\alpha-1}}{s^\alpha(B(\alpha)+k(1-\alpha))+k\alpha} + \frac{kx_{eq}\alpha}{s(s^\alpha(B(\alpha)+k(1-\alpha))+k\alpha)}$$

Realizando-se o procedimento de frações parciais, depois aplicação da transformada inversa, e normalização, obtém-se a expressão descrita na Equação 3.3:

$$MR = \frac{B(\alpha)}{B(\alpha) + k(1-\alpha)} E_\alpha\left(\frac{-k\alpha}{B(\alpha) + k(1-\alpha)}t^\alpha\right) \quad (3.3)$$

Modelos fracionários devem convergir para os modelos clássicos nos casos limites. Ao avaliar quando $\alpha = 1$, as funções obtidas devem se transformar no modelo de Lewis, que seria o limite clássico. Isso pode ser observado em todos os três modelos fracionários, considerando que o limite clássico da função de Mittag-Leffler é a função exponencial (Podlubny *et al.*, 2009).

O resultado da solução da EDF de Atangana-Baleanu difere do reportado por Ercan (2025), enquanto Caputo e Caputo-Fabrizio apresentaram concordância. A

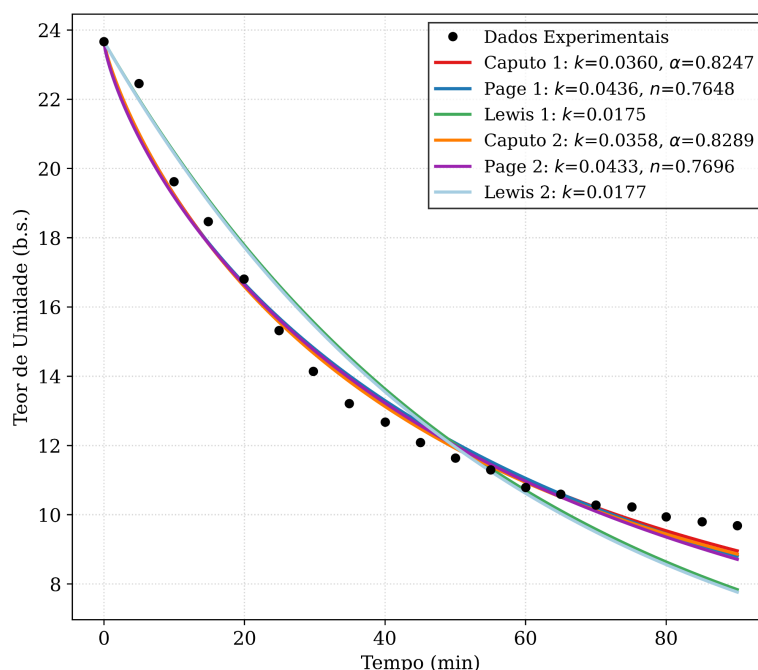
diferença pode estar associada ao tratamento do termo de memória na aplicação da transformada integral, resultando em um comportamento assintótico distinto daquele esperado no limite clássico. Vale destacar que a resolução do estudo em questão não apresentou nenhuma forma de normalizar a equação através de MR.

3.2 Validação do algoritmo de otimização de parâmetros

Conforme citado na metodologia, os parâmetros dos modelos devem ser otimizados por meio dos dados experimentais, e, para isso, é necessário um algoritmo consistente. Com base nos dados de Ferrari (2023), é possível realizar a validação do algoritmo considerando os modelos de Lewis, Page e Caputo, uma vez que esses foram os modelos considerados no estudo em questão.

A Figura 1 apresenta o teor de umidade em função do tempo para as curvas de secagem geradas pelos modelos de Lewis, Page e Caputo, cujos parâmetros foram estimados pelo estudo de Ferrari (2023) e pelo algoritmo do presente estudo, para os dados de secagem do milho a 70°C, com umidificação de 11 minutos e com teor de umidade inicial de 23,6% (b.s.).

Figura 1 – Comparação gráfica das curvas de secagem para validação do algoritmo



Nota: Índice 1 - presente estudo (2026); índice 2 - estudo de Ferrari (2023).

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados de Ferrari (2023) e dos próprios autores (2026)

Como é possível observar, as curvas do estudo reportado coincidem com as curvas geradas pelo algoritmo proposto pelo presente estudo para todos os modelos analisados.

A Tabela 2 apresenta a comparação entre os parâmetros obtidos pelo estudo reportado e pelo presente estudo com o algoritmo que se está buscando validar. Apresenta-se três conjuntos de dados obtidos apenas pelo modelo de Caputo, visto que Page e Lewis apresentam resultados análogos.

Tabela 2 – Validação do algoritmo: parâmetros estimados pelo modelo de Caputo e comparação com a literatura

Dados	α_1	α_2	$e_{rel\ \alpha 21}$ (%)	k_1	k_2	$e_{rel\ k 21}$ (%)	R_1^2	R_2^2
D1	0,8247	0,8289	0,51	0,0360	0,0358	0,56	0,9844	0,9841
D2	0,8638	0,8619	0,22	0,0110	0,0112	1,78	0,9961	0,9957
D3	0,6812	0,6809	0,04	0,0361	0,0356	1,38	0,9918	0,9913

Nota: D1 - milho 70°C, 11 minutos de umidificação, 23,6% (b.s.); D2 - trigo 40°C, sem umidificação, 12,6% (b.s.); D3 - feijão 60°C, 2 minutos de umidificação, 18,7% (b.s.); índice 1 - presente estudo; índice 2 - Ferrari (2023).

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados de Ferrari (2023) e dos próprios autores (2026)

Conforme pode ser observado, os erros relativos entre os parâmetros estimados são baixos, indicando elevada concordância do algoritmo de otimização com a literatura reportada. Além disso, os coeficientes de determinação são muito próximos, o que indica que além dos parâmetros cinéticos estarem em concordância, a otimização da curva de secagem inteira tem comportamento semelhante, com diferenças desprezíveis.

3.3 Comparação entre os modelos de secagem

Para melhor clareza na análise, foi avaliado qual o modelo que mais se adequou aos dados entre os modelos fracionários propostos, sendo este último posteriormente comparado com os modelos tradicionais de secagem.

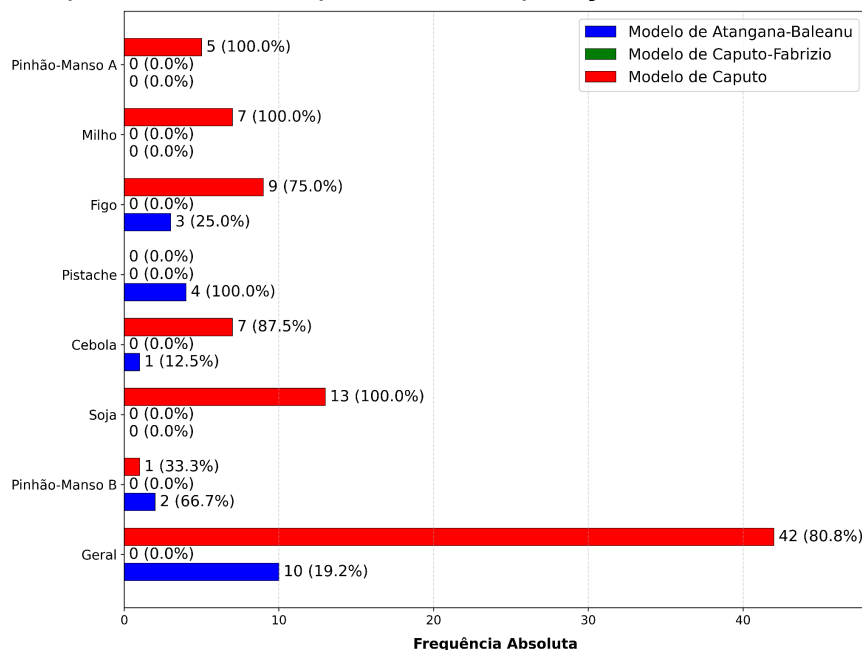
3.3.1 Comparação entre os modelos fracionários propostos

Os modelos fracionários foram avaliados para o conjunto de 52 curvas de secagem, com diferentes produtos e condições operacionais, otimizando os parâmetros dos modelos e obtendo-se as métricas estatísticas pelo algoritmo proposto, conforme dados no Apêndice A.

Inicialmente avaliou-se qual modelo fracionário apresenta o melhor desempenho global e desempenho por produto, ao descrever a cinética de secagem através das duas métricas estatísticas principais previamente citadas. Verificou-se concordância entre os indicadores estatísticos avaliados, de modo que o modelo que apresentou maior R^2 , apresentou também menor $RMSE$ para cada curva individual.

A Figura 2 mostra a frequência de melhor desempenho de cada modelo fracionário para cada produto analisado e no aspecto geral.

Figura 2 – Frequência de desempenho da comparação entre modelos fracionários

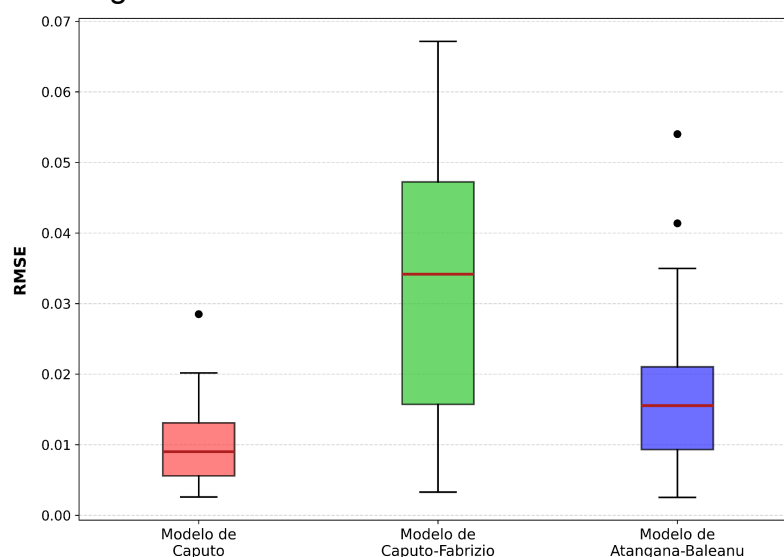


Fonte: Elaboração própria (2026)

Percebe-se uma tendência global nos dados, onde se observa que o modelo de Caputo foi o que apresentou o melhor desempenho na maioria dos produtos listados. O modelo de Atangana-Baleanu apresentou poucos casos onde teve superioridade no desempenho. Enquanto isso, o modelo de Caputo-Fabrizio não apresentou nenhum caso onde foi superior aos outros.

Em um segundo momento, foi avaliado qual modelo apresentou a menor variabilidade no conjunto de dados globais, através da distribuição de erros no aspecto global, usando-se o $RMSE$, como pode ser observado na Figura 3.

Figura 3 – Diagrama de caixas de $RMSE$ dos modelos fracionários



Fonte: Elaboração própria (2026)

Observa-se que o modelo de Caputo não apenas apresentou o menor erro

médio, mas também uma maior robustez global, o que é evidenciado pela menor variabilidade dos erros. Enquanto isso, o modelo de Caputo-Fabrizio apresentou uma grande variabilidade dos erros, além de valores médios relativamente mais altos que os outros modelos.

Essas duas evidências globais que o modelo de Caputo-Fabrizio apresentou podem estar relacionadas a uma questão fundamental da característica da derivada. O kernel da derivada do modelo em questão é uma exponencial, o que confere uma característica de memória curta à diferencial (Caputo; Fabrizio, 2015). Com isso, Caputo-Fabrizio se aproxima muito do modelo de Lewis nesse quesito.

Para conseguir avaliar os casos onde o modelo de Atangana-Baleanu possui desempenho superior ao de Caputo (que apresentou dominância global), foram selecionados conjuntos de dados representativos que sintetizam os principais padrões observados. Na Tabela 3, é possível verificar o α dos modelos de Caputo e Atangana-Baleanu, assim como os valores de R^2 para os dados do pistache e do milho analisados.

Tabela 3 – Dados representativos do aspecto global observado para o modelo de Caputo e Atangana-Baleanu

Produto/ Condição	α_{Caputo}	α_{AB}	R^2_{Caputo}	R^2_{AB}
Milho/40°C	0,7252	0,8211	0,9995	0,9914
Milho/45°C	0,7130	0,8163	0,9989	0,9889
Milho/50°C	0,7254	0,8244	0,9987	0,9892
Milho/55°C	0,7605	0,8456	0,9993	0,9919
Milho/60°C	0,7836	0,8616	0,9981	0,9917
Milho/65°C	0,7790	0,8599	0,9980	0,9907
Milho/70°C	0,7746	0,8616	0,9988	0,9887
Pistache/25°C	0,8731	0,8734	0,9945	0,9946
Pistache/40°C	0,8975	0,8979	0,9946	0,9947
Pistache/55°C	0,9331	0,9335	0,9968	0,9969
Pistache/70°C	0,9537	0,9542	0,9981	0,9981

Nota: Índice AB (modelo de Atangana-Baleanu).

Fonte: Elaboração própria (2026)

Observa-se um padrão ao analisar os dados do milho e do pistache. Enquanto, para o milho, o modelo de Caputo apresentou o melhor desempenho, para o pistache, obteve-se uma ligeira superioridade do modelo de Atangana-Baleanu.

O padrão está justamente na proximidade dos dados quando o Atangana-Baleanu tem o resultado melhor. O modelo em questão não possui ganhos significativos de desempenho frente ao modelo de Caputo, visto que a diferença é quase nula entre o R^2 e o α de ambos. Já quando o modelo de Caputo

possui métricas melhores, a diferença é muito maior.

Somando-se a isso, percebe-se, no conjunto de dados, que o modelo de Atangana-Baleanu tem valores de α maiores para a grande maioria dos casos. Isso pode estar relacionado com a característica do kernel da derivada, que apresenta uma memória lenta (Atangana; Baleanu, 2016). Frente ao exposto, tem-se que alguns domínios da secagem, como por exemplo o início da curva (que apresenta uma tendência mais rápida), acaba por tornar o kernel dessa derivada fracionária não apto a modelar as mesmas.

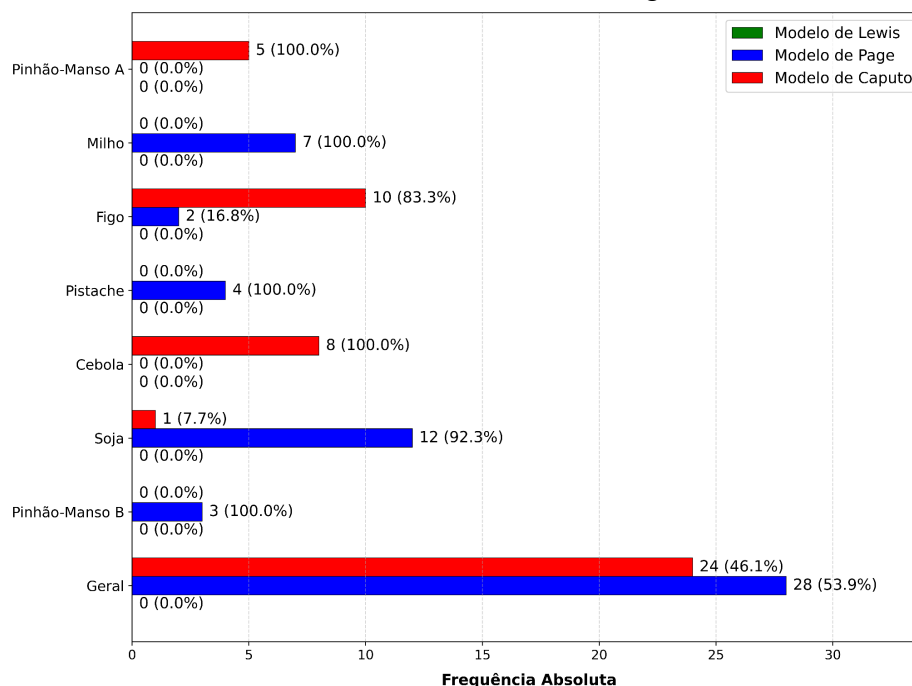
Conforme toda a discussão realizada, em suma, percebe-se que o modelo de Caputo possui a maior frequência de melhor desempenho, possui a menor variabilidade dos erros e ainda possui maior flexibilidade em regimes de secagem frente aos outros modelos fracionários. Neste sentido, depreende-se que a secagem apresenta uma tendência a possuir memória do tipo potência.

3.3.2 Comparação entre o modelo de Caputo e os modelos tradicionais de secagem

A fim de investigar se há um modelo de secagem superior, comparou-se o melhor modelo fracionário encontrado neste estudo com os modelos tradicionais. A avaliação partiu dos parâmetros obtidos pelas 52 curvas de secagem analisadas (Apêndice A) considerando duas métricas estatísticas principais, o R^2 e o $RMSE$. Novamente, identificou-se concordância entre os indicadores estatísticos avaliados, de modo que o menor $RMSE$ estava equivalente ao maior R^2 , para a mesma curva de secagem.

A Figura 4 mostra a frequência de melhor desempenho considerando os modelos analisados nesta seção (o modelo de Caputo, Page e Lewis), para cada produto analisado e no aspecto geral.

Figura 4 – Frequência de desempenho da comparação entre o modelo de Caputo e modelos tradicionais de secagem



Fonte: Elaboração própria (2026)

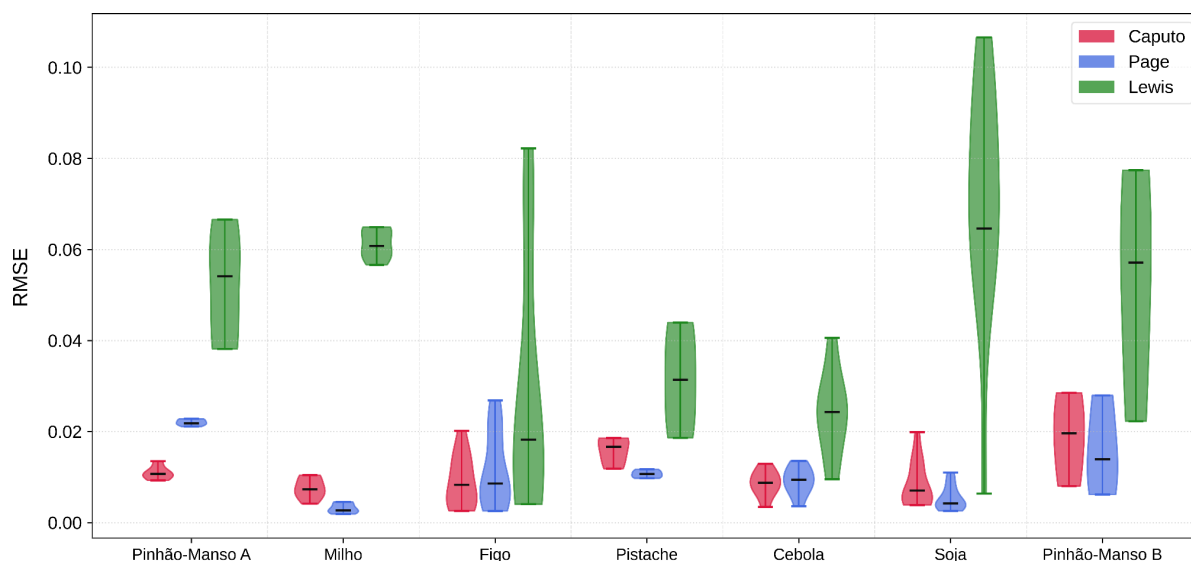
Observa-se que não existe superioridade global entre os dados no aspecto geral, sendo que o modelo de Page e Caputo estão muito próximos em termos de modelagem. Já para o modelo de Lewis é evidente a falta de desempenho, pois ele não obteve o menor $RMSE$ em nenhuma curva, para nenhum produto.

Porém é possível verificar que existe uma dominância do modelo de Caputo para alguns produtos da análise (pinhão-manso A, figo e cebola), enquanto o modelo de Page supera-o em outros produtos (milho, pistache, soja e pinhão-manso B). Isso indica que o modelo que irá melhor descrever a cinética de secagem depende do produto analisado, e também pode estar relacionado a mais aspectos, como pré-tratamento de amostras e condições operacionais.

O estudo de Nicolin *et al.* (2018), também chegou ao mesmo resultado, onde Caputo supera Lewis e apresenta modelagem ligeiramente superior a Page, porém para um conjunto de dados muito pequeno. Já no estudo de Ferrari (2023), chega-se à mesma conclusão para um conjunto mais abrangente de dados, porém não é possível identificar dominância por produto, isso pode estar relacionado a falta de controle de condições operacionais como velocidade do ar, por exemplo.

A próxima etapa para entender se os modelos são condicionados a produtos, portanto, é avaliar a distribuição de erros por produto, em especial o $RMSE$, o que indica se a diferença de modelagem é expressiva. A distribuição de $RMSE$ por produto pode ser verificada na Figura 5 para os modelos de Caputo, Page e Lewis.

Figura 5 – Gráfico de violino para a distribuição de $RMSE$ por produto considerando os modelos de Caputo, Page e Lewis



Fonte: Elaboração própria (2026)

Na imagem é possível verificar que o modelo de Lewis é o que apresenta a maior variabilidade dos dados, isso indica que a exponencial simples não é suficiente para representar a dinâmica da secagem observada. Matematicamente, o modelo assume que o processo é descrito apenas por uma única taxa de remoção de umidade ao longo do processo, desconsiderando efeitos de secagem como heterogeneidade do material, redistribuição de umidade e caminhos tortuosos (que levariam a uma distribuição de velocidade de secagem) (Lewis, 1921).

Já nos modelos de Caputo e Page, conforme a Figura 5, é possível indicar

que para alguns produtos existe grande diferença entre as distribuições de erros, como é o caso do pinhão-manso A, milho e pistache.

Após a análise de distribuição de erros, buscou-se investigar por qual razão o modelo de Caputo obtém melhores métricas estatísticas do que Page em alguns casos, e vice-versa. A hipótese de que o melhor modelo depende do produto a ser seco é automaticamente descartada pelo fato de que o conjunto de dados apresenta o mesmo produto em duas condições diferentes (pinhão-manso A e pinhão-manso B), sendo o primeiro conjunto melhor modelado por Caputo, enquanto o segundo por Page.

Ao analisar o estudo de Keneni, Hvoslef-Eide e Marchetti (2019) sobre o conjunto do pinhão-manso A, e o estudo de Subroto (2015) sobre o conjunto do pinhão-manso B, percebe-se que os dados coletados do primeiro estudo foram referentes as sementes trituradas, enquanto no segundo estudo as sementes estavam inteiras e com casca (ambos os estudos avaliaram as duas condições, porém o presente estudo coletou os dados da forma descrita acima). Duas interpretações fundamentam esse comportamento, sendo possível que ambas coexistam de maneira complementar ou de forma isolada.

A primeira interpretação pode estar relacionada ao fato descrito por Jian, Narendran e Jayas (2019), que constataram que triturar grãos causa uma maior liberação de poros, porém esses poros abertos possuem formatos variados e irregulares, aumentando a heterogeneidade estrutural e a resistência de fluxo do ar. Extrapolando esse fato ao caso da secagem, o pinhão-manso triturado pode ter apresentado uma estrutura irregular de poros de forma mais tortuosa que a semente inteira com a casca. Dessa forma, o modelo de Caputo, que captura melhor heterogeneidade estrutural (Patnaik; Holikamp; Semperlotti, 2020), representa o conjunto do pinhão-manso A de forma superior.

Já a segunda interpretação reside no fato de o fenômeno de memória, modelado pela derivada de Caputo, é um processo gradual, uma vez que inicialmente a função de Mittag-Leffler apresenta uma aproximação linear em relação a t^α (próximo ao modelo ideal), descrito pela Equação 2.16, e após esse processo inicial, a Equação 2.17 demonstra que a função de Mittag-Leffler irá apresentar cauda longa, característica associada ao efeito de memória. Nesse sentido, a casca de um alimento impede que a água venha a sair de maneira rápida, logo no início do processo (resistência fenomenológica). Dessa forma, o processo, como um todo, está sujeito a uma barreira que domina a dinâmica da transferência de massa, do começo ao fim, mascarando potenciais efeitos de memória. Nesse sentido, o modelo de Page mais se adequa aos dados pela sua estrutura matemática.

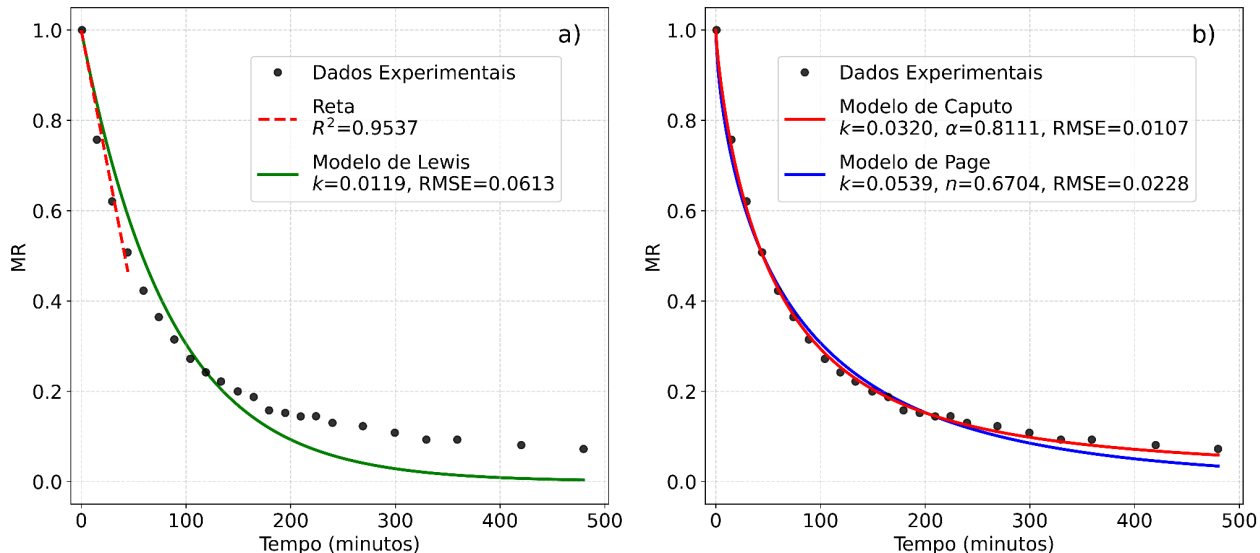
Os dados do pinhão-manso mostraram que a superioridade entre os modelos não depende exclusivamente do produto analisado, mas também da estrutura inteira do mesmo e de como evolui-se a dinâmica da secagem temporalmente. Dessa forma, torna-se relevante investigar como as propriedades matemáticas dos modelos possuem correspondência qualitativa com as curvas experimentais.

Com o conhecimento da estrutura matemática da função de Mittag-Leffler (que está presente no modelo de Caputo), principalmente suas aproximações em tempos iniciais e tempos grandes, como é descrito na Equação 2.16 e na Equação 2.17, é possível verificar visualmente, nas curvas de secagem, os casos onde Caputo mais se adequa.

Na Figura 6, é possível observar que no caso a) os dados experimentais estão plotados junto ao modelo de Lewis (exponencial simples). Uma reta auxiliar, via regressão, também foi plotada a fim de demonstrar o quanto os dados estão

próximos ao comportamento ideal no início. Em b), por sua vez, os dados experimentais foram plotados junto aos modelos de Caputo e Page, para os dados do pinhão-manso A, na temperatura de 323 K.

Figura 6 – Curva de secagem do pinhão-manso A na temperatura de 323 K



Nota: a) modelo de Lewis e ajuste linear (4 pontos); b) modelo de Caputo e modelo de Page.

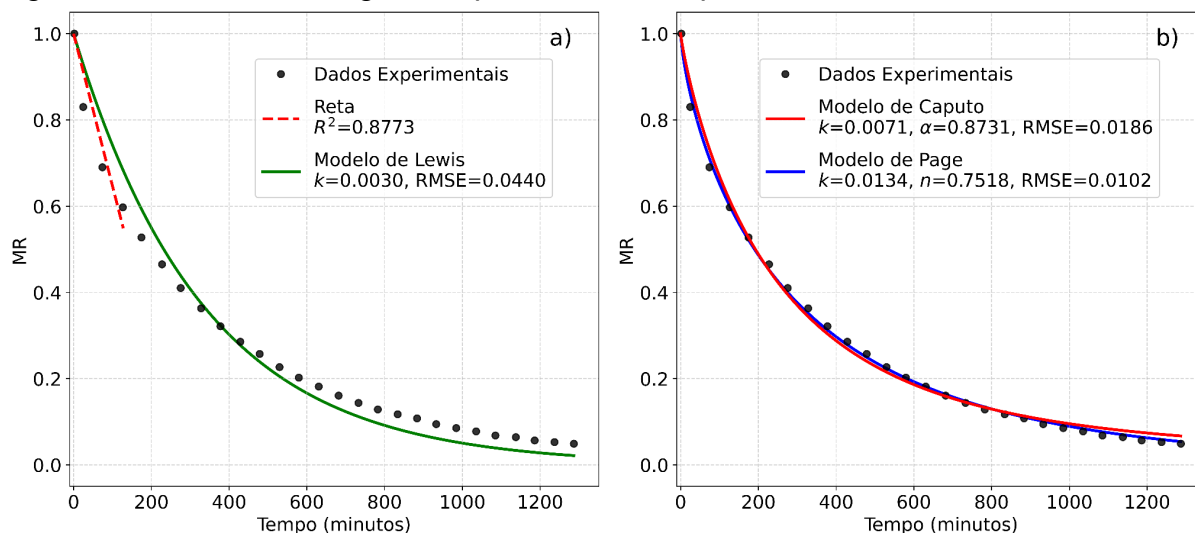
Fonte: Elaboração própria (2026)

Verifica-se que o comportamento inicial dos dados experimentais possui tendência linear, e, inclusive, até mesmo os primeiros pontos possuem o decaimento mais acentuado do que uma reta, compatível com a função de Mittag-Leffler com $\alpha < 1$, obtido pelo modelo de Caputo. Ao comparar com o modelo de Lewis, que se distorce inicialmente para tentar prever o final da curva, percebe-se que esses dados experimentais formam uma curva que inicia de forma linear/superlinear, e se distorcem gerando uma cauda longa, compatível com a função de Mittag-Leffler e seu processo de memória (Mainardi, 2020).

Neste panorama, é possível perceber que o modelo de Caputo se adequa melhor a essa curva justamente pela característica dos dados e pela característica de memória, que acontece de forma gradual, gerando cauda longa (Podlubny *et al.*, 2009), enquanto o modelo de Page apresentou maior dificuldade em representar esse comportamento assintótico, resultando em pior previsão na região final da curva.

O contrário do comportamento de cauda longa, e consequentemente melhor ajuste do modelo de Page, pode ser observado na Figura 7, que mostra a) os dados experimentais plotados junto ao modelo de Lewis (exponencial simples) e a uma reta de regressão que demonstra o quanto os dados estão próximos ao comportamento ideal no início, e em b) os dados experimentais e os modelos de Caputo e Page para os dados do pistache na temperatura de 25°C (o pistache foi selecionado por apresentar contraste visual mais nítido entre os modelos, mantendo o mesmo padrão qualitativo do pinhão-manso B).

Figura 7 – Curva de secagem do pistache na temperatura de 25°C



Nota: a) modelo de Lewis e ajuste linear (4 pontos); b) modelo de Caputo e modelo de Page.

Fonte: Elaboração própria (2026)

Verifica-se que o comportamento inicial dos dados não apresentou tendência linear e a evolução gradual característicos da função de Mittag-Leffler, o que contribuiu para que o modelo de Caputo não representasse adequadamente a curva de secagem. É possível observar, neste exemplo, que o modelo de Caputo não conseguiu prever a dinâmica no final do processo.

Já o modelo de Page, cuja estrutura matemática é baseada em uma exponencial esticada, permite, por meio do parâmetro n , distorcer o comportamento exponencial clássico, adaptando-o a curvas em que o processo apresenta um mesmo mecanismo resistivo dominante, desde os instantes iniciais. Nessas condições, os efeitos de memória tornam-se menos evidentes, favorecendo o ajuste do modelo de Page.

Vale ressaltar que as interpretações foram realizadas com base nos casos extremos (casos onde a diferença entre $RMSE$ era grande), para os casos onde a diferença se mostrou pequena, o comportamento é semelhante porém menos evidente.

Após a análise gráfica, houve a investigação dos parâmetros do modelo de Caputo e Page variando com as condições operacionais, em especial, a temperatura e velocidade do ar de secagem, que foram as informações mais consistentes nos dados em questão. Essas relações podem expressar o fato de que os parâmetros não são simplesmente ajustes matemáticos, mas sim, parâmetros que representam as condições físicas do sistema.

Especialmente, a análise se concentrou nos parâmetros α e n , visto que a literatura já mostra de forma consistente que o parâmetro cinético k varia com essas condições (Kucuk *et al.*, 2014).

A Tabela 4 apresenta os parâmetros α e n variando com a temperatura para os dados do pinhão-manso A e do pistache, e os mesmo parâmetros variando com a velocidade do ar de secagem, para os dados da soja e da cebola.

Tabela 4 – Parâmetros dos modelos de Caputo e Page variando com a temperatura e velocidade do ar de secagem

Produto	T (K)	α_{Caputo}	n_{Page}	Produto	v (m/s)	α_{Caputo}	n_{Page}
Pinhão-Manso A	313	0,7819	0,6658	Soja	0	0,9484	0,9417
	323	0,8110	0,6704		0,12	0,7291	0,6481
	333	0,8275	0,6563		0,24	0,7238	0,6489
	343	0,8399	0,6091		0,49	0,7193	0,6295
	353	0,8444	0,6208		1	0,7061	0,6285
Pistache	298	0,8731	0,7518	Cebola	2	0,7036	0,6209
	313	0,8975	0,7939		2	0,8428	0,8246
	328	0,9331	0,8685		3,6	0,8230	0,7984
	343	0,9537	0,9066		5,7	0,7522	0,7193
					7,7	0,7052	0,6627

Nota: T = temperatura (kelvin); v = velocidade do ar (metros/segundo);
Fonte: Elaboração própria (2026)

Percebe-se através dos dados uma tendência do parâmetro α aumentar conforme a temperatura aumenta, uma relação que aparentemente não foi documentada na literatura até o presente momento.

Uma possível explicação para esse comportamento é que o aumento da temperatura promove uma maior mobilidade da água no interior do material, intensificando seu transporte em direção à superfície, possibilitando o aumento da taxa de evaporação. Com isso, a umidade presente nos caminhos mais tortuosos é liberada mais facilmente, reduzindo os atrasos associados ao transporte de umidade nas regiões internas do material (Tadini *et al.*, 2019). Como o operador de Caputo descreve processos com efeitos de memória, a redução dos atrasos entre as diferentes regiões do material torna o comportamento do sistema menos dependente de seu histórico, refletindo-se em maiores valores do parâmetro α (Andrade; Lima; Dartora, 2018).

Já para o parâmetro do modelo de Page, percebe-se que nos dados do pistache, o parâmetro n aumenta com o acréscimo da temperatura, porém, no experimento do pinhão-manso A ele apresenta oscilações, o que não parece ter explicação aparente.

Percebe-se através dos dados uma tendência do parâmetro α diminuir conforme a velocidade do ar aumenta, uma relação que aparentemente não foi documentada na literatura até o presente momento.

Isso pode estar ligado ao fato de que, conforme se aumenta a velocidade do ar de secagem, a umidade superficial do sólido passa a ser removida mais rapidamente (Tadini *et al.*, 2019). Dessa forma, os mecanismos difusivos associados

à migração interna tornam-se relevantes em instantes mais iniciais da secagem. Como esse transporte ocorre através de caminhos tortuosos e heterogêneos no interior do material, os efeitos de memória passam a influenciar a dinâmica do processo de maneira mais significativa, contribuindo para a redução do parâmetro α do modelo de Caputo.

A diferença entre a temperatura é que a ação da velocidade do ar atua de forma externa, já a temperatura atua de forma a aumentar a taxa interna da secagem, diante disso, tais condições, de fato, afetam de forma inversa o fenômeno de memória associado a estrutura do material.

Para o parâmetro n do modelo de Page, estabelece-se a mesma relação de diminuição conforme aumenta-se a velocidade de secagem. O estudo de Kashaninejad *et al.* (2007), já apresentou tais relações com o parâmetro n , isso pode indicar que os parâmetros do modelo de Page também podem refletir alterações físicas da dinâmica de secagem, porém de forma mais instável que o modelo de Caputo.

Essas relações entre os parâmetros foram evidenciadas quando havia preconização do planejamento dos experimentos. Em geral, quando o estudo se propôs a variar somente uma condição por vez, mantendo-se todas as outras constantes, as tendências começaram a se evidenciar. Possivelmente um estudo mais rigoroso, estabelecendo condições restritas, poderá descobrir a forma funcional da variação dos parâmetros.

4 CONCLUSÕES

O presente estudo atingiu os objetivos propostos ao desenvolver, de forma independente, modelos fracionários baseados nos operadores de Caputo, Caputo-Fabrizio e Atangana-Baleanu para a descrição da cinética de secagem em camada fina. O algoritmo de otimização foi validado, permitindo a comparação dos modelos fracionários entre si, e do melhor modelo fracionário frente aos modelos clássicos de Lewis e Page por meio de métricas estatísticas. Além disso, foi possível investigar a relação entre os parâmetros dos modelos de melhor desempenho e as condições operacionais de temperatura e velocidade do ar de secagem, propondo interpretações físicas para os comportamentos observados.

Os resultados da comparação dos modelos fracionários apontaram melhor desempenho do modelo de Caputo, sendo alcançada esta resposta através da frequência de menor $RMSE$ e maior R^2 das curvas, além da menor distribuição de erros. O modelo de Atangana-Baleanu apesar de apresentar desempenho satisfatório, não apresentou um caso onde possuía uma diferença expressiva de modelagem, estabelecendo que os dados analisados apresentaram uma memória do tipo potência.

Ao comparar o modelo de Caputo com Lewis e Page ficou evidente que a hegemonia de modelagem não estava presente, sendo dependente do produto analisado mais as condições operacionais. Ao comparar dois estudos diferentes sobre pinhão-manso, estabeleceu-se possíveis relações entre a estrutura do material e a presença de memória, como um processo gradual. A análise gráfica mostrou que através do comportamento da função de Mittag-Leffler, os experimentos onde Caputo melhor modelava se faziam presentes quando havia comportamento inicial próximo aos modelos ideais e cauda longa na curva de secagem.

A relação entre os parâmetros dos modelos com a variação de temperatura e

velocidade do ar se mostrou consistente para certos dados experimentais, porém diante da escassez de grande variação das condições na literatura conseguiu-se apenas evidenciar certas tendências. O parâmetro fracionário apresentou uma tendência ao chegar próximo da unidade com o aumento da temperatura, o que pode estar ligado a mudanças internas, enquanto se afastou da unidade quando a velocidade aumentava, estando este, portanto, relacionado a mudanças externas.

Os dados evidenciam que o modelo fracionário de Caputo possui uma frequência de melhor desempenho semelhante a Page, e o superou-o a depender do produto e condições operacionais, com a vantagem de fornecer uma interpretação física consistente com o fenômeno e com transferência de calor e massa. Sendo assim, modelos fracionários além de fornecer melhor modelagem em certos casos, fornecem interpretações relacionadas a estrutura interna dos produtos e efeitos de memória não evidentes.

Estudos da literatura comparam modelos de Page e Caputo, chegando a resultados similares, mas nenhum conseguiu relacionar com interpretações físicas de estrutura interna e comportamento da função de Mittag-Leffler, o que destaca, como possível inovação, o presente estudo.

Estudos futuros devem se concentrar em gerar e analisar conjuntos de dados com diversas temperaturas e velocidades do ar diferentes (além de teor de umidade inicial, espessura do material, entre outras condições), possibilitando estabelecer formas funcionais com interpretações físicas mais consistentes aos modelos. Além disso, se faz necessário a generalização dos modelos para caso de derivadas fracionárias de ordem variável.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Alex Michel Fernandes de; LIMA, Eduardo Gonçalves de; DARTORA, Cesar Augusto. Uma introdução ao cálculo fracionário e suas aplicações em circuitos elétricos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Curitiba, v. 40, n. 3, e-3314, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0011>. Acesso em: 2 jun. 2026.

ATANGANA, Abdon; BALEANU, Dumitru. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. **Thermal Science**, [S. l.], v. 20, n. 2, p. 763-769, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1602.03408>. Acesso em 2 jun. 2026.

BABALIS, S. J. *et al.* Evaluation of thin-layer drying models for describing drying kinetics of figs (*Ficus carica*). **Journal of Food Engineering**, Oxford, v. 75, n. 2, p. 205–214, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2005.04.008>. Acesso em: 2 jun. 2026.

BERBERAN-SANTOS, Mário N.; BODUNOV, Evgeny N.; VALEUR, Bernard. Mathematical functions for the description of reversible and irreversible fluorescence quenching. Stretched exponential (Kohlrausch) decay. **Chemical Physics**, [S. l.], v. 315, n. 1-2, p. 171-182, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2005.04.006>. Acesso em: 2 jun. 2026.

BHANGALE, Nikita; KACHHIA, Krunal B. A Fractional Calculus Approach to Study

Newton's Law of Cooling. **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, Gujarat, v. 8, n. 2, p. 275-287, 2022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.18576/pfda/080207>. Acesso em: 2 jun. 2026.

BHONG, M. G.; KALE, V. M. A novel thin-layer model for drying of Indian dark red onion slices at high velocity. **Journal of Food Process Engineering**, Hoboken, v. 43, n. 2, e13317, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/jfpe.13317>. Acesso em: 2 jun. 2026.

BROOKER, Donald B.; BAKKER-ARKEMA, Fred W.; HALL, Carl W. **Drying and Storage of Grains and Oilseeds**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1992.

CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, [S. l.], v. 1, n. 2, p. 1-13, 2015. Disponível em: <https://www.naturalspublishing.com/files/published/0gb83k287mo759.pdf>. Acesso em: 12 out. 2025.

CARLESSO, V. O. *et al.* Secagem de sementes de maracujá em camada delgada. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 27, n. 3, p. 444-448, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0100-29452005000300025>. Acesso em: 2 jun. 2026.

CHICOTE, Maria Fernanda Lindquist. **Estudo e Aplicações do Cálculo Fracionário em Engenharia Química**. 2025. 76 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2025. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/45194>. Acesso em: 10 out. 2025.

DREVON, Daniel D.; FURSA, Sophie R.; MALCOLM, Allura L. Intercoder Reliability and Validity of WebPlotDigitizer in Extracting Graphed Data. **Behavior Modification**, Thousand Oaks, v. 41, n. 2, p. 323-339, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/0145445516673998>. Acesso em: 2 jun. 2026.

ERBAY, Zafer; ICIER, Filiz. A Review of Thin Layer Drying of Agricultural Products. **Critical Reviews in Food Science and Nutrition**, Philadelphia, v. 50, n. 5, p. 441-475, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10408390802437063>. Acesso em: 3 jun. 2026.

ERCAN, Ahu. Fractional kinetic models for drying using a semi-empirical method in the framework of different types of kernels. **Symmetry**, Basel, v. 17, n. 4, art. 483, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/sym17040483>. Acesso em: 2 jun. 2026.

FERRARI, Andressa Lopes. **Modelagem de ordem fracionária aplicada a processos de separação**. 2023. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, 2023. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31676>. Acesso em: 12 out. 2025.

FERREIRA, Walison Arruda. **Cálculo fracionário**: noções básicas e aplicação. 2024. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Cajazeiras, Cajazeiras, 2024. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/3717>. Acesso em: 13 out. 2025.

GODÍNEZ, F. A. *et al.* Two fractal versions of Newton's law of cooling. **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, [S. l.], v. 1, n. 2, 2015. Disponível em: <https://www.naturalspublishing.com/files/published/uh848g8n222s22.pdf>. Acesso em: 12 out. 2025.

GRANELLA, Suian José. Anomalous diffusion in drying: A fractional calculus perspective on modeling and applications in agro-food systems. **Food Physics**, Amsterdam, 100088, 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.foodp.2026.100088>. Acesso em: 3 jun. 2026.

HACIHAFIZOGLU, O. *et al.* Diffusion model for thin layer drying process of corn. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering**, Londres, v. 224, n. 1, p. 19–26, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1243/09544089JPME253>. Acesso em: 2 jun. 2026.

JIAN, F.; NARENDHAN, R. B.; JAYAS, D. S. Segregation in stored grain bulks: Kinematics, dynamics, mechanisms, and minimization – A review. **Journal of Stored Products Research**, Amsterdam, v. 81, p. 11–21, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jspr.2018.12.004>. Acesso em: 2 jun. 2026.

JOHNSTON, D. C. Stretched exponential relaxation arising from a continuous sum of exponential decays. **Physical Review B**, Ridge, v. 74, n. 18, 184430, 2006. Disponível em: <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.74.184430>. Acesso em: 2 jun. 2026.

JUNIOR, Luciano Bento da Silva. **A Integral Fracionária de Riemann-Liouville sobre os espaços $\mathbb{I}^p$** . 2023. 133 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/249804>. Acesso em: 14 out. 2025.

KASHANINEJAD, M. *et al.* Thin-layer drying characteristics and modeling of pistachio nuts. **Journal of Food Engineering**, Oxford, v. 78, n. 1, p. 98-108, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2005.09.007>. Acesso em: 2 jun. 2026.

KENENI, Y. G.; HVOSLEF-EIDE, A. K.; MARCHETTI, J. M. Mathematical modelling of the drying kinetics of *Jatropha curcas* L. seeds. **Industrial Crops and Products**, Norway, v. 132, p. 12–20, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.indcrop.2019.02.012>. Acesso em: 2 jun. 2026.

KHATCHATOURIAN, O. A. Experimental study and mathematical model for soya bean drying in thin layer. **Biosystems Engineering**, Ijuí, v. 113, n. 1, p. 54–64, 2012.

Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2012.06.006>. Acesso em: 2 jun. 2026.

KUCUK, Haydar *et al.* A Review on Thin-Layer Drying-Curve Equations. **Drying Technology**, Philadelphia, v. 32, n. 7, p. 757-773, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/07373937.2013.873047>. Acesso em: 3 jun. 2026.

LEWIS, W. K. The Rate of Drying of Solid Materials. **The Journal of Industrial and Engineering Chemistry**, [S. l.], v. 13, n. 5, p. 427-432, 1921. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/ie50137a021>. Acesso em: 2 jun. 2026.

MACHADO, J. A. T. *et al.* Some Applications of Fractional Calculus in Engineering. **Mathematical Problems in Engineering**, [S. l.], v. 2010, n. 1, 639801, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1155/2010/639801>. Acesso em: 2 jun. 2026.

MAINARDI, Francesco. Why the Mittag-Leffler Function Can Be Considered the Queen Function of the Fractional Calculus? **Entropy**, Basel, v. 22, n. 12, 1359, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/e22121359>. Acesso em: 3 jun. 2026.

MATIAS, G. S. *et al.* A model of distributed parameters for non-Fickian diffusion in grain drying based on the fractional calculus approach. **Biosystems Engineering**, Bedford, v. 226, p. 16-26, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2022.12.004>. Acesso em: 2 jun. 2026.

MENDONÇA, A. K. F. *et al.* Resolvendo numericamente equações diferenciais fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Brasília, v. 44, e-20210426, 2022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2021-0426>. Acesso em: 2 jun. 2026.

NICOLIN, D. J. *et al.* Mathematical modeling of soybean drying by a fractional-order kinetic model. **Journal of Food Process Engineering**, Hoboken, v. 41, n. 2, e12655, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/jfpe.12655>. Acesso em: 2 jun. 2026.

ODIBAT, Z. Analytical and numerical study of short memory Caputo fractional derivatives. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, v. 487, art. 117752, 2026. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2026.117752>. Acesso em: 2 jun. 2026.

ONWUDE, Daniel I. *et al.* Modeling the Thin-Layer Drying of Agricultural Products: A Review. **Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety**, [S. l.], v. 15, n. 3, p. 531-554, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/1541-4337.12196>. Acesso em: 2 jun. 2026.

PATNAIK, Sansit; HOLLKAMP, John P.; SEMPERLOTTI, Fabio. Applications of variable-order fractional operators: a review. **Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [S. l.], v. 476, n. 2234, 20190498, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2019.0498>. Acesso em: 2 jun. 2026.

PODLUBNY, Igor *et al.* Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations. **Journal of Computational Physics**, [S. l.], v. 228, n. 8, p. 3137-3153, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.01.014>. Acesso em: 2 jun. 2026.

RAJAMANICKAM, Vignesh *et al.* About Model Validation in Bioprocessing. **Processes**, Basel, v. 9, n. 6, p. 961, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/pr9060961>. Acesso em: 3 jun. 2026.

ROHATGI, Ankit. **WebPlotDigitizer**. Versão 5, 2024. Disponível em: <https://automeris.io>. Acesso em: 2 jun. 2026.

SUBROTO, Erna. **Optimization of Jatropha curcas pure plant oil production**. 2015. 159 f. Tese (Doutorado em Chemical Engineering) – University of Groningen, Groningen, 2015. Disponível em: https://pure.rug.nl/ws/portalfiles/portal/23864969/Chapter_2.pdf. Acesso em: 2 jun. 2026.

TADINI, C. C. *et al.* **Operações unitárias na indústria de alimentos**. v. 2. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

VIRTANEN, P. *et al.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. **Nature Methods**, Nova Iorque, v. 17, p. 261–272, 2020. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s41592-019-0686-2>. Acesso em: 2 jun. 2026.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais**: com aplicações em modelagem. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

APÊNDICE A - TABELAS DE PARÂMETROS DOS MODELOS E MÉTRICAS ESTATÍSTICAS

Tabela A1 - Parâmetros dos modelos e métricas estatísticas dos modelos para as 52 curvas de cinética de secagem

Pro- duto	Condição	Caputo			Caputo-Fabrizio			Atangana-Baleanu			Page			Lewis	
		α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	n	k	$RMSE$	k	$RMSE$
PA	313 K	0,7819	0,0229	0,0135	0,0464	0,1445	0,0531	0,7860	0,0251	0,0140	0,6658	0,0370	0,0218	0,0070	0,0666
PA	323 K	0,8111	0,0320	0,0107	0,0834	0,1384	0,0529	0,8154	0,0343	0,0117	0,6704	0,0539	0,0228	0,0119	0,0613
PA	333 K	0,8275	0,0424	0,0093	0,1501	0,1174	0,0495	0,8306	0,0454	0,0099	0,6563	0,0767	0,0211	0,0180	0,0541
PA	343 K	0,8399	0,0715	0,0107	0,5285	0,0667	0,0393	0,8438	0,0758	0,0113	0,6091	0,1456	0,0227	0,0353	0,0399
PA	353 K	0,8444	0,0765	0,0105	0,5470	0,0721	0,0376	0,8485	0,0808	0,0111	0,6208	0,1479	0,0218	0,0396	0,0382
M	40°C	0,7252	0,3360	0,0042	0,6600	0,3212	0,0393	0,8211	0,3067	0,0176	0,6442	0,3512	0,0019	0,2252	0,0566
M	45°C	0,7130	0,3999	0,0065	0,6567	0,3756	0,0451	0,8163	0,3611	0,0210	0,6185	0,4129	0,0027	0,2611	0,0644
M	50°C	0,7255	0,4219	0,0073	0,6735	0,3951	0,0455	0,8244	0,3828	0,0213	0,6269	0,4343	0,0027	0,2796	0,0641
M	55°C	0,7605	0,4386	0,0058	0,7178	0,4112	0,0431	0,8456	0,4045	0,0196	0,6611	0,4513	0,0022	0,3062	0,0589
M	60°C	0,7836	0,5154	0,0102	0,7550	0,4787	0,0442	0,8616	0,4786	0,0212	0,6724	0,5249	0,0045	0,3711	0,0588
M	65°C	0,7790	0,5396	0,0105	0,7553	0,4973	0,0463	0,8599	0,4991	0,0225	0,6628	0,5473	0,0046	0,3855	0,0608
M	70°C	0,7746	0,6287	0,0083	0,7730	0,5644	0,0515	0,8616	0,5760	0,0253	0,6433	0,6272	0,0035	0,4470	0,0649
F	55°C/0,5 m/s	0,9081	0,0508	0,0049	0,4753	0,0768	0,0186	0,9140	0,0517	0,0057	0,8671	0,0566	0,0077	0,0371	0,0245
F	65°C/0,5 m/s	0,9160	0,0692	0,0039	0,4966	0,1058	0,0158	0,9211	0,0705	0,0043	0,8723	0,0767	0,0061	0,0535	0,0225
F	75°C/0,5 m/s	0,9852	0,0709	0,0026	0,8938	0,0760	0,0033	0,9858	0,0712	0,0026	0,9762	0,0723	0,0026	0,0681	0,0040
F	85°C/0,5 m/s	0,9892	0,1021	0,0088	1,0000	0,0996	0,0092	0,9929	0,1015	0,0089	0,9906	0,1016	0,0090	0,0996	0,0092
F	55°C/1 m/s	0,9722	0,0604	0,0030	0,8226	0,0675	0,0050	0,9743	0,0606	0,0030	0,9585	0,0624	0,0026	0,0559	0,0071

Pro- duto	Condição	Caputo			Caputo-Fabrizio			Atangana-Baleanu			Page			Lewis	
		α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	n	k	$RMSE$	k	$RMSE$
F	65°C/1 m/s	0,9494	0,0879	0,0079	0,7826	0,0982	0,0103	0,9546	0,0884	0,0077	0,9283	0,0917	0,0081	0,0778	0,0140
F	75°C/1 m/s	0,9758	0,1114	0,0039	0,9531	0,1106	0,0064	0,9802	0,1112	0,0043	0,9647	0,1136	0,0041	0,1056	0,0068
F	85°C/1 m/s	0,9926	0,1387	0,0093	1,0000	0,1367	0,0095	0,9965	0,1379	0,0094	0,9953	0,1379	0,0095	0,1367	0,0095
F	55°C/3 m/s	0,7549	0,1059	0,0140	0,2252	0,1876	0,0544	0,7806	0,1074	0,0175	0,6539	0,1303	0,0218	0,0453	0,0759
F	65°C/3 m/s	0,7382	0,1376	0,0135	0,2916	0,1962	0,0595	0,7762	0,1353	0,0200	0,6405	0,1619	0,0221	0,0635	0,0822
F	75°C/3 m/s	0,8030	0,1644	0,0202	0,5181	0,1873	0,0510	0,8389	0,1603	0,0255	0,7259	0,1823	0,0269	0,1034	0,0626
F	85°C/3 m/s	0,9273	0,1955	0,0154	0,9030	0,1901	0,0229	0,9479	0,1921	0,0173	0,9026	0,2005	0,0172	0,1738	0,0242
PI	25°C/1,5 m/s	0,8731	0,0071	0,0186	0,0243	0,1214	0,0292	0,8734	0,0075	0,0185	0,7518	0,0134	0,0102	0,0030	0,0440
PI	40°C/1,5 m/s	0,8975	0,0104	0,0186	0,0565	0,0978	0,0271	0,8979	0,0109	0,0185	0,7939	0,0170	0,0117	0,0056	0,0374
PI	55°C/1,5 m/s	0,9331	0,0125	0,0148	0,1390	0,0621	0,0188	0,9335	0,0129	0,0147	0,8685	0,0166	0,0111	0,0087	0,0253
PI	70°C/1,5 m/s	0,9537	0,0169	0,0118	0,2979	0,0449	0,0156	0,9542	0,0172	0,0118	0,9066	0,0204	0,0097	0,0134	0,0187
C	50°C/2 m/s	0,9149	0,0017	0,0070	0,0694	0,0152	0,0076	0,9156	0,0018	0,0070	0,9062	0,0019	0,0070	0,0011	0,0096
C	50°C/3,6 m/s	0,7752	0,0049	0,0075	0,0224	0,0573	0,0112	0,7789	0,0054	0,0075	0,7470	0,0059	0,0077	0,0015	0,0243
C	50°C/5,7 m/s	0,8215	0,0041	0,0102	0,0293	0,0484	0,0122	0,8238	0,0044	0,0102	0,7961	0,0048	0,0103	0,0016	0,0217
C	50°C/7,7 m/s	0,7805	0,0053	0,0078	0,0247	0,0591	0,0151	0,7845	0,0058	0,0079	0,7505	0,0064	0,0085	0,0016	0,0265
C	60°C/2 m/s	0,8429	0,0029	0,0034	0,0356	0,0328	0,0070	0,8448	0,0031	0,0035	0,8246	0,0033	0,0036	0,0013	0,0144
C	60°C/3,6 m/s	0,8230	0,0043	0,0130	0,0347	0,0441	0,0183	0,8258	0,0046	0,0130	0,7985	0,0050	0,0136	0,0017	0,0244
C	60°C/5,7 m/s	0,7522	0,0063	0,0097	0,0215	0,0675	0,0185	0,7576	0,0069	0,0099	0,7193	0,0077	0,0106	0,0016	0,0308
C	60°C/7,7 m/s	0,7052	0,0093	0,0108	0,0163	0,0976	0,0219	0,7129	0,0105	0,0111	0,6627	0,0119	0,0120	0,0019	0,0406

Pro- duto	Condição	Caputo			Caputo-Fabrizio			Atangana-Baleanu			Page			Lewis	
		α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	n	k	$RMSE$	k	$RMSE$
S	0,9 m/s/0,13 d.b.	0,6977	0,4087	0,0076	0,8052	0,4101	0,0304	0,8607	0,3792	0,0203	0,6473	0,4141	0,0071	0,3688	0,0483
S	0,9 m/s/0,22 d.b.	0,6605	0,6295	0,0123	0,6933	0,6030	0,0540	0,8152	0,5586	0,0315	0,5653	0,6018	0,0098	0,4788	0,0898
S	0,9 m/s/0,32 d.b.	0,6716	0,7531	0,0138	0,6675	0,7261	0,0545	0,8121	0,6693	0,0310	0,5538	0,7035	0,0110	0,5311	0,0889
S	0,12 m/s/0,538 d.b.	0,6423	0,7009	0,0075	0,7012	0,7022	0,0408	0,8115	0,6314	0,0235	0,5497	0,6602	0,0042	0,5538	0,0787
S	0,5 m/s/0,538 d.b.	0,6086	0,8936	0,0135	0,6912	0,8502	0,0561	0,8018	0,7782	0,0350	0,4994	0,7932	0,0075	0,6704	0,1066
S	0,9 m/s/0,538 d.b.	0,5662	0,9225	0,0070	0,7595	0,9641	0,0593	0,8160	0,8473	0,0414	0,4715	0,8140	0,0053	0,8767	0,1005
S	1,5 m/s/0,538 d.b.	0,5288	0,9601	0,0047	0,8661	1,0546	0,0672	0,8678	0,9428	0,0540	0,4373	0,8354	0,0032	1,0112	0,0870
S	0 m/s/0,162 d.b.	0,9484	0,1296	0,0041	0,9549	0,1288	0,0055	0,9721	0,1277	0,0046	0,9417	0,1318	0,0041	0,1250	0,0064
S	0,12 m/s/0,162 d.b.	0,7291	0,4580	0,0049	0,6678	0,4793	0,0326	0,8294	0,4275	0,0147	0,6481	0,4622	0,0037	0,3633	0,0633
S	0,24 m/s/0,162 d.b.	0,7238	0,4793	0,0039	0,7219	0,4838	0,0337	0,8405	0,4434	0,0165	0,6489	0,4798	0,0033	0,3898	0,0612
S	0,49 m/s/0,162 d.b.	0,7193	0,5021	0,0045	0,6610	0,5315	0,0346	0,8231	0,4698	0,0164	0,6295	0,5038	0,0026	0,3961	0,0628
S	1 m/s/0,162 d.b.	0,7061	0,5236	0,0042	0,7265	0,5284	0,0359	0,8363	0,4825	0,0186	0,6285	0,5184	0,0035	0,4317	0,0646
S	2 m/s/0,162 d.b.	0,7036	0,5426	0,0049	0,7417	0,5226	0,0391	0,8388	0,4917	0,0211	0,6209	0,5347	0,0045	0,4171	0,0630
PB	50°C/397 cm/min	0,9287	0,0087	0,0080	0,1493	0,0396	0,0158	0,9293	0,0090	0,0080	0,8873	0,0105	0,0062	0,0060	0,0223

Pro- duto	Condição	Caputo			Caputo-Fabrizio			Atangana-Baleanu			Page			Lewis	
		α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	α	k	$RMSE$	n	k	$RMSE$	k	$RMSE$
PB	50°C/794 cm/min	0,8375	0,0256	0,0196	0,1050	0,1053	0,0465	0,8399	0,0273	0,0195	0,7198	0,0399	0,0139	0,0117	0,0571
PB	50°C/1190 cm/min	0,7828	0,0360	0,0285	0,0905	0,1313	0,0670	0,7880	0,0391	0,0288	0,6445	0,0591	0,0280	0,0129	0,0774

Nota: PA: pinhão-manso A; M: milho; F: figo; PI: Pistache; C: Cebola; S: Soja; PB: pinhão-manso B; dados da soja todos a 70°C.

Fonte: Elaboração própria (2026) a partir de dados da Tabela 1