

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA
CATARINA – CÂMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETROTÉCNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

KAREM VIEIRA PAES DE LIMA

**ESTUDO SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DE MODELO OCULTO DE
MARKOV À PREVISÃO DE PREÇO DE ELETRICIDADE**

FLORIANÓPOLIS, 2025

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA
CATARINA – CÂMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETROTÉCNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

KAREM VIEIRA PAES DE LIMA

**ESTUDO SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DE MODELO OCULTO DE
MARKOV À PREVISÃO DE PREÇO DE ELETRICIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro(a) Eletricista.

Orientador:
Prof. Everthon Taghori Sica, Dr. Eng.

FLORIANÓPOLIS, 2025.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor.

Paes de Lima, Karem
**ESTUDO SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DE MODELO OCULTO DE MARKOV
À PREVISÃO DE PREÇO DE ELETRICIDADE / Karem Paes de Lima;**
orientação de Everthon Sica. - Florianópolis,
SC, 2025.
89 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) - Instituto Federal
de Santa Catarina, Câmpus Florianópolis. Bacharelado
em Engenharia Elétrica. Departamento Acadêmico
de Eletrotécnica.
Inclui Referências.

1. Modelagem de preços de eletricidade. 2. Previsão
de tendências. 3. Modelos Ocultos de Markov. I. Sica,
Everthon . II. Instituto Federal de Santa Catarina.
III. ESTUDO SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DE MODELO OCULTO
DE MARKOV À PREVISÃO DE PREÇO DE ELETRICIDADE .

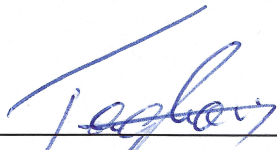
ESTUDO SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DE MODELO OCULTO DE MARKOV À PREVISÃO DE PREÇO DE ELETRICIDADE

KAREM VIERIA PAES DE LIMA

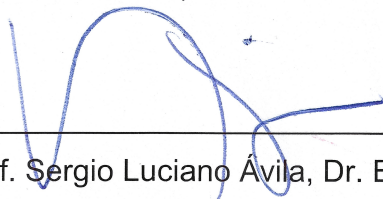
Este trabalho foi julgado adequado para obtenção do título de Engenheiro(a) Eletricista e aprovado na sua forma final pela banca examinadora do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina.

Florianópolis, 15 de dezembro, 2025.

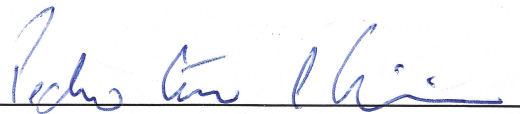
Banca Examinadora:



Prof. Everthon Taghori Sica, Dr. Eng



Prof. Sergio Luciano Ávila, Dr. Eng.



Prof. Pedro César Cordeiro Vieira, Dr. Eng.

Dedico esse trabalho a meus familiares: a àqueles que sempre me apoiaram e hoje estão comigo apenas em meu coração, meus amados avô, Celso Paes de Lima, e tio, Celso Filho F. Paes de Lima. À nova geração, minhas amadas sobrinhas, Nicolle e Manuella que me mostram amor constante e me ensinam que problemas são ponto de vista (com um quarto da minha idade). Às minhas amadas avó e tia, Manuela Glória Ferreira Paes de Lima e Lúcia Paes de Lima Montebello por todo amor, direcionamento e apoio. Por fim, ao meu tio Danilo F. Paes de Lima e, por último, mas não menos importe, ao meu pai Bruno F. Paes de Lima, por me inspirarem a seguir a jornada das ciências exatas desde criança.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Everthon Taghori Sica, e ao Prof. Sergio Luciano Ávila, pelas instruções e auxílio aplicados neste trabalho e pela imensa compreensão humana quando tive problemas de saúde e precisei de pequenas ausências médicas no decorrer deste trabalho. Agradeço aos meus familiares e amigos, que foram elo de força neste período. Ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Santa Catarina pelo conhecimento técnico adquirido ao longo dos anos que passei nesta instituição. Ao laboratório de Planejamento Integrado de Recursos Energéticos e ao grupo de Pesquisa em Computação Científica para Engenharia, pelas pesquisas que conduzimos em equipe e me motivaram na escolha do tema deste trabalho.

“Você é o arquiteto da sua própria prisão.”
(Raymond E. Feist ; Magician: Master, 1982)

RESUMO

Este trabalho apresenta a implementação de um Modelo Oculto de Markov (HMM) para analisar a dinâmica de preço de energia elétrica no Brasil. Utilizando dados coletados da Bolsa Brasileira de Comercialização de Energia Elétrica (BBCE). O HMM foi implementado em Python para modelar e prever os preços da energia. O objetivo é comparar o histórico de preços fornecido pela BBCE com as previsões geradas pelo modelo. Para avaliar a eficácia das previsões e o esforço computacional associado, são aplicadas métricas estáticas de avaliação, incluindo o Erro Médio de Bias (MBE), o Erro Absoluto Percentual Médio (MAPE), o Erro Quadrático Médio (MSE) e a Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE). Estas métricas ajudarão a determinar a precisão das previsões e a eficiência computacional do modelo HMM, fornecendo uma visão abrangente sobre a performance do modelo na previsão de preços de energia elétrica no mercado brasileiro. Com isso, espera-se obter uma avaliação da capacidade do HMM em refletir a dinâmica real dos preços no setor elétrico.

Palavras-chave: Economia de Mercado. Modelagem de preços de eletricidade. Previsão de tendências. Modelos Ocultos de Markov.

ABSTRACT

This work presents the implementation of a Hidden Markov Model (HMM) to analyze the dynamics of electricity prices in Brazil. Using data collected from the Brazilian Electricity Trading Exchange (BBCE), the HMM was implemented in Python to model and predict energy prices. The objective is to compare the price history provided by BBCE with the predictions generated by the model. To evaluate the effectiveness of the predictions and the associated computational effort, static evaluation metrics are applied, including Mean Bias Error (MBE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE), Mean Squared Error (MSE), and Root Mean Squared Error (RMSE). These metrics will help determine the accuracy of the predictions and the computational efficiency of the HMM model, providing a comprehensive view of the model's performance in predicting electricity prices in the Brazilian market. The aim is to obtain an assessment of the HMM's ability to reflect the real dynamics of prices in the electricity sector.

Keywords: Market Economy. Integrated Planning. Electrical Energy Price Modeling. Trend Forecasting. Hidden Markov Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Componente fixa ou determinável e componente aleatória	20
Figura 2 - <i>Random Walk</i> ou passeio aleatório.....	21
Figura 3 - (a) Comparação cálculo newtoniano e (b) Processos estocásticos	22
Figura 4 - Caminhos gerados por passeio aleatório.....	22
Figura 5 - Oscilações caracterizadas como difusão de saltos.....	23
Figura 6 - (a) Reversão a média com difusão de salto e (b) Amortecimento do preço após um salto permeando o preço de equilíbrio	23
Figura 7 - (a) Representação do processo de preço atual e processo de preço futuro na curva de preço futuro e (b) Visualização da curvatura da inclinação para frente em termos de reversão da média do preço atual e preço futuro	24
Figura 8 - Discretização da periodicidade do mercado	24
Figura 9 - (a) Cubo de periodicidade do mercado e (b) Representações de contratos padrões do cubo de preços.....	25
Figura 10 - Comportamento da volatilidade.....	26
Figura 11 - <i>Spikes</i> no mercado PJM (USA).....	33
Figura 12 - Estados de transição em um sistema Markoviano e seus possíveis estados observáveis	36
Figura 13 - Representação de uma Cadeia Oculta de Markov	37
Figura 14 - Possíveis transições (a) e emissões (b) de estados	40
Figura 15 - Possíveis transições dos estados do mercado de energia caracterizadas pelas faixas de preços.....	41
Figura 16 - Curva de preço	42
Figura 17 - Resultado dos preços previstos por IOHMM.....	43
Figura 18 - Estados de ativação IOHMM	43
Figura 19 - Curvas de preço e estados observados.....	44
Figura 20 - Exemplo de curva <i>forward</i> para três semanas.....	47
Figura 21 - Comportamento dos produtos setembro a dezembro de 2020	52
Figura 22 - Comportamento dos produtos setembro a dezembro de 2020 associado a precipitação prevista.....	53
Figura 23 - Correlação de Pearson entre preço e precipitação	54
Figura 24 - Correlação de <i>Sperman</i> entre preço e precipitação.....	55
Figura 25 - Correlação de <i>Spearman</i> entre Bacias, precipitação, preço médio e volume	56
Figura 26 - Correlação de <i>Spearman</i> entre o preço médio e a ENA em Bacias	57
Figura 27 - Exemplo Modelo Oculto de Markov	58

Figura 28 - Ilustração do modelo de cadeia de Markov oculta de alta ordem.	59
Figura 29 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias pela hip. 01 (Eq. 13)	64
Figura 30 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias pela hip. 02 (Eq. 15)	64
Figura 31 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias por VWAP (Eq. 11)	65
Figura 32 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias pela hip. 01 (Eq. 13)	66
Figura 33 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias pela hip. 02 (Eq. 15)	66
Figura 34 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias por VWAP (Eq. 11)	67
Figura 35 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias pela hip. 01 (Eq. 13)	67
Figura 36 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias pela hip. 02 (Eq. 15)	68
Figura 37 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias por VWAP (Eq. 11)	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Matriz de emissões para o HMM.....	40
Tabela 2 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 15 dias.	70
Tabela 3 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 30 dias.	70
Tabela 4 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 100 dias.	71

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Definição do Problema	15
1.2	Justificativa	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Objetivo Geral	17
1.3.2	Objetivos Específicos	18
1.4	Estrutura do trabalho	18
2	INTRODUÇÃO A MODELAGEM DO PREÇO DE ELETRICIDADE	19
2.1	Introdução ao processo de variabilidade do preço	20
2.1.1	Random Walk.....	21
2.1.2	Difusão de salto	22
2.1.3	Reversão à média	23
2.2	Introdução aos aspectos da oportunidade econômica	23
2.2.1	Periodicidade	24
2.3	Introdução aos aspectos da volatilidade	25
2.4	Introdução aos aspectos da valoração das opções reais	29
2.5	Conclusão	32
3	COMPORTAMENTO DO MERCADO E CADEIAS DE MARKOV DE ORDEM OCULTA	33
3.1	Cadeia oculta de Markov e preço a termo e futuro	35
3.2	Modelo de Cadeia Oculta de Markov	38
3.3	Descrição Metodológica Proposta	45
3.3.1	Volume Weighted Average Price (VWAP).....	45
3.3.2	Base de dados	47
3.4	Conclusão	49
4	PROCEDIMENTOS, SIMULAÇÃO E RESULTADOS	50
4.1	Análise de dados brutos e aspectos hidrológicos correlatos	50
4.2	Modelo de Cadeias Ocultas de Markov	57
4.2.1	Condições de implementação	58
4.2.2	Definição de estado	60
4.2.3	Identificação de novas probabilidades de transição e emissão.....	60
4.3	Análise e testes da implementação	61
4.4	Resultados e discussão	63
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	APÊNDICE	81
	APÊNDICE A – SCRIPT PRINCIPAL MODIFICADO	81
	APÊNDICE B – SCRIPT PARA GRÁFICOS DE PRECIPITAÇÃO POR BACIAS VS. VOLUME DE NEGOCIAÇÃO.....	84

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, o mercado elétrico se divide em dois cenários distintos e principais. O primeiro é denominado Ambiente de Contratações Reguladas (ACR).

No ACR, as concessionárias de distribuição adquirem a energia elétrica de que necessitam por meio de leilões regulados, com regras definidas nos art. 11 a 46 do decreto nº 5.163 de 2004. Os leilões são realizados pela ANEEL, com apoio da CCEE, conforme regras e diretrizes definidas pelo MME. (Vizioli, 2017, p.31)

Também no ACR, os consumidores de baixa tensão e alguns de alta tensão são obrigados a adquirir energia diretamente das concessionárias, seguindo tarifas, normas estipuladas pela ANEEL e de acordo com Walvis e Gonçalves, (2014, p.37) “os contratos realizados no âmbito do ACR têm como parâmetros preço e prazo pré-definidos, e estes não podem ser alterados pelos agentes”. Nos leilões ACR são firmados contratos de longo prazo entre as distribuidoras e as geradoras de energia vencedores, garantindo o fornecimento por períodos que podem variar de 15 a 30 anos.

Por outro lado, no segundo ambiente, conhecido como Mercado Livre (ACL), e de acordo Brondani e Canha, (2022, p.2) “os consumidores livres compram a energia diretamente dos geradores e comercializadores, através de contratos bilaterais”. Outra opção são transações em tempo real na plataforma eHUB da Bolsa Brasileira de Comercialização de Energia Elétrica (BBCE). Na plataforma eHUB, os agentes econômicos podem transacionar o produto (eletricidade), com prazos e entregas mensais, tanto no mercado a vista como no mercado futuro, proporcionando uma maior flexibilidade na negociação de preços, prazos e fontes de energia. Segundo Felizatti et al., (2019):

O mercado de energia brasileiro tem muitas características específicas que fazem com que os agentes de mercado tenham que lidar com variáveis e detalhes regulatórios não encontrados em mercados financeiros ou em mercados de eletricidade de outros países.(p.2).

Dessa maneira e de acordo com Felizatti et al., (2019), os agentes e empresas de comercialização de energia no SEB tendem a investir em criar seus próprios modelos de gestão de risco e previsão de preços. No entanto, existe uma cadeia de modelos criada pelo CEPEL usada oficialmente no Brasil para determinar o despacho e a formação do preço da energia elétrica.

A combinação dos modelos NEWAVE, DECOMP e DESSEM, desenvolvidos pelo CEPEL, torna o planejamento e a operação do sistema elétrico do Brasil integrados. Cada um desses modelos desempenha uma função específica em diferentes horizontes de tempo e níveis de detalhe, formando uma cadeia integrada que otimiza desde o planejamento de médio e longo prazo até a operação diária (BARBOSA *et al.*, 2022).

O modelo NEWAVE é empregado no planejamento de médio e longo prazo, abrangendo horizontes de 5 a 10 anos. Este estabelece as políticas ideais de operação dos reservatórios hidrelétricos e cria cenários hidrológicos com base em técnicas avançadas de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) expostas em seu manual (CEPEL, 2023).

O modelo DECOMP atua em um horizonte de curto prazo, mensalmente até um ano. Utilizando programação linear e não-linear, ele otimiza a operação do Sistema Interligado Nacional (SIN), com informações advindas do NEWAVE. O DECOMP por sua vez calcula o Custo Marginal de Operação (CMO). O modelo DESSEM opera em um curto prazo, com resolução diária e horária. Faz o detalhamento da operação diária do sistema elétrico, esse considera restrições operacionais, segurança do sistema e demanda horária real e utiliza programação linear para definir o despacho das usinas, os fluxos de potência e os níveis dos reservatórios (CEPEL, 2025).

A integração desses modelos ocorre por meio de um fluxo contínuo de informações e retroalimentação. Os resultados do NEWAVE alimentam o DECOMP com políticas de longo prazo e cenários hidrológicos, enquanto as decisões de despacho e o CMO calculados pelo DECOMP orientam as operações detalhadas pelo DESSEM. Essa dinamicidade garante que as decisões de planejamento sejam refletidas e ajustadas de acordo com as condições reais do sistema elétrico.

1.1 Definição do Problema

Prever a direção de tendência futura dos preços da energia elétrica no Brasil é um desafio complexo devido à natureza do modelo energético, que combina hidroelétricas, termelétricas e eolioelétricas, tornando-o não-linear e sujeito a incertezas relacionadas às condições climáticas e ao despacho de energia. Essa

complexidade dificulta a previsão dos preços, especialmente devido à imprevisibilidade das chuvas e dos níveis de vazão. Além disso, a crescente participação de fontes de energia intermitentes tem reduzido a flexibilidade do despacho do sistema elétrico interligado, e as decisões regulatórias podem aumentar a volatilidade dos preços.

As empresas de energia, sobretudo comercializadoras, enfrentam o desafio de antecipar as tendências de preços e geralmente utilizam os modelos oficiais usados no Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) e da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), além de métricas próprias. No entanto, esses modelos podem não considerar todos os eventos político-regulatórios que afetam os preços, tornando difícil para os agentes do setor prever tais eventos.

Este trabalho propõe um Modelo Oculto de Markov (HMM) com otimizador de números de cadeias ocultas a fim de ser mais uma ferramenta para análise do agente comercializador. Os HMMs são amplamente usados para prever preços de *commodities* e do mercado financeiro, sua aplicação tem sido mais eficaz em previsões de curto e médio prazo, com menor precisão na previsão de eventos abruptos nos preços segundo Xiong e Mamon, (2016).

Esse trabalho visa criar um modelo, num ambiente novo, a fim deste ser mais uma variável na tomada de decisão do agente comercializador quando tenta prever a tendência de preços praticados no mercado de energia brasileiro, mais especificamente nos preços de produtos mensais de energia, dentro do mercado ACL, na BBCE.

1.2 Justificativa

O DECOMP aprimora a estratégia operacional desenvolvida pelo modelo de longo prazo (NEWAVE), considerando detalhes específicos das usinas e do sistema de transmissão (CEPEL, 2021). Ao considerar a incerteza nas condições hidrológicas e adotar uma abordagem de aversão ao risco, o DECOMP garante um despacho de energia robusto. O NEWAVE incorpora uma abordagem de aversão ao risco hidrológico e considera diversas restrições operacionais do sistema elétrico (CCEE, 2022).

Ambos os modelos citados possuem um preço por sua licença, treinamentos privados pagos e ainda há um custo para operá-los de forma a potencializar os estudos. Geralmente os agentes de mercado utilizam uma ferramenta de gerenciamento de controle e execução para alguns modelos do Cepel chamada PROSPEC, da empresa Norus Energy, esta ferramenta é privada, ou seja, também envolve custos para sua utilização e permite que o usuário escolha diretamente computadores na *Amazon Web Services* (AWS) por eficiência e custo por minuto para rodar os modelos de otimização do sistema. Portanto, além do custo do gerenciador também há o custo das máquinas alocadas na AWS.

No entanto, os modelos NEWAVE, DECOMP e DESSEM não consideram as complexas interações entre eventos político-regulatórios internos e os movimentos especulativos entre os participantes do mercado, o que pode influenciar significativamente os preços. As empresas de comercialização de energia buscam antecipar as tendências de preço para obter vantagens no mercado de futuro. Para isso, além de utilizar os modelos criados pelo Cepel, essas também desenvolvem suas próprias métricas especulativas para minimizar frustrações.

Dessa maneira, considerando o dispêndio com o uso dos softwares e de métricas para minimizar frustrações, o uso de modelos secundários no portfólio dos agentes de comercialização, que auxiliem na tomada de decisão, em seus processos de trabalho é imprescindível (Santos et al., 2022).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em implementar e analisar os resultados do Modelo Oculto de Markov Superior de segunda Ordem para tendência de preço produtos do mercado de energia elétrica, comparando-os com o preço real praticado nos horizontes 15, 30 e 100 dias de negociação na BBCE, além de mostrar uma bibliografia de evolução literária até a implementação do modelo proposto.

1.3.2 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como finalidade para seus objetivos específicos:

- a) introduzir conceitos de finanças utilizados na geminação da modelagem de preço da eletricidade;
- b) explicar previamente o são modelos ocultos de Markov e mostrar suas contribuições ao longo dos anos;
- c) implementar um banco de dados em preço bruto;
- d) implementar em *Volume Weighted Average Price* (VWAP) a massa de dados trabalhada na efetivação do modelo;
- e) implementar um modelo de HMM em *Python*;
- f) apresentar valores históricos de preço por horizontes de quinze, trinta e cem dias;
- g) comparar os valores históricos com os resultados de preço sintético obtidos pelo modelo; e
- h) analisar os resultados com meio de métricas de performance, estatística, MAPE (Erro Percentual Absoluto Médio), RMSE (Raiz do Erro Quadrático Médio), MBE (Erro de Viés Médio) e MSE (Erro Quadrático Médio) .

1.4 Estrutura do trabalho

No primeiro capítulo, a introdução, deste trabalho, trata-se da explicação do mercado elétrico brasileiro, que se divide em dois cenários principais: o Ambiente de Contratações Reguladas (ACR) e o Ambiente de Contratações Livres (ACL). Além disso, explica que o mercado de energia brasileiro possui características específicas que exigem modelos próprios de gestão de risco e previsão de preços.

Para o planejamento e operação do sistema elétrico, o Brasil utiliza uma cadeia integrada de modelos desenvolvidos pelo CEPEL: NEWAVE para o planejamento de médio e longo prazo, DECOMP para o curto prazo mensal, e DESSEM para o detalhamento diário e horário da operação. A interação entre esses

modelos permite otimizar o sistema elétrico, garantindo decisões eficazes baseadas nas condições reais do mercado.

O segundo capítulo, mostra uma introdução a conceitos matemáticos e financeiros sobre o preço da eletricidade, como também praticado em outros mercados como de *commodities* não estocáveis. Aspectos como variabilidade, oportunidade econômica, periodicidade, volatilidade e valoração são elucidados.

No terceiro capítulo, aprofunda-se uma fundamentação teórica sobre processos Markovianos em geral e mistos, cadeias de Markov e modelos ocultos de Markov explicando por menores sua teoria e modelagem. Além disso, elucida sobre o VWAP (Preço Médio Ponderado por Volume) uma métrica crucial no mercado financeiro e aborda o conceito de curva *forward* (sobretudo na BBCE), essencial para prever preços futuros, planejamento financeiro e na gestão de riscos.

Já o quarto capítulo, este explica os métodos e procedimentos utilizados para conduzir a pesquisa, elucida-se o porquê de se trabalhar com dados de VWAP. Também explica o método para obtenção dos dados a serem utilizados neste trabalho como insumo para o modelo matemático implementado via *python*, e os horizontes de dados sintéticos, isto é, dados de previsão a serem trabalhados.

O quinto capítulo, aborda as considerações finais sobre todo o trabalho presente seguido por um apêndice com a principal codificação trabalhada. E, por fim apresentam-se as referências bibliográficas.

2 INTRODUÇÃO A MODELAGEM DO PREÇO DE ELETRICIDADE

A compreensão inicial sobre fundamentos de um amplo campo de *commodities* pode ser utilizada no entendimento do comportamento do preço da eletricidade. E, mais precisamente do comportamento do mercado de energia elétrica pela interface de um agente comercializador tentando obter uma vantagem sobre a formação do preço das liquidações e diferenças (PLD) ou por exemplo, uma tendência sobre o mesmo.

Inicialmente para compreender a formação do preço é preciso compreender as interrelações entre o sistema físico de geração e transmissão; os direcionadores de demanda; a interpretação e aplicação fundamentais de processos estatísticos; e o ajuste para efeitos adicionais, como meio ambiente, localização etc. O detalhamento de um sistema de potência (geração e transmissão) físico, como, por exemplo, no Brasil, é compreendido dentro de modelos computacionais no Operador do Sistema Elétrico e na Câmara de Comercialização de Energia, NEWAVE, DECOMP e DESSEM para formação do Custo Marginal da Operação, pelo ONS, e do PLD, pela CCEE.

O estabelecimento dos direcionadores de demanda, assim como, também, os de oferta se mostram intrínsecos ao movimento do preço. Não obstante, aplicações de processos estatísticos e ajustes para efeitos adicionais sobre processos estatísticos se tornam uma vertente importante para avaliar e entender comportamentos sobre o preço, tanto sobre o mercado de *comodities*, como é observado há anos, mas também em mercados de energia elétrica considerando incrementos e ajustes para tal.

2.1 Introdução ao processo de variabilidade do preço

Um processo é a definição estatística formal da maneira como uma variável se comporta, podemos descrevê-lo informalmente como na Figura 1.

Figura 1 - Componente fixa ou determinável e componente aleatória



Fonte: Autora (2025).

A mudança na variável em um pequeno intervalo de tempo é composta de uma mudança determinística que é fixa ou precisamente determinável a partir do estado atual do sistema mais uma mudança que é aleatória, mas com uma aleatoriedade que é precisamente definida (este tipo de aleatoriedade é denominada

estocástica). Alguns conceitos aplicados no processo de modelagens para o preço de *commodities* e ações das bolsas de valores são aplicados também para o mercado de energia elétrica, tais como os relacionados a seguir.

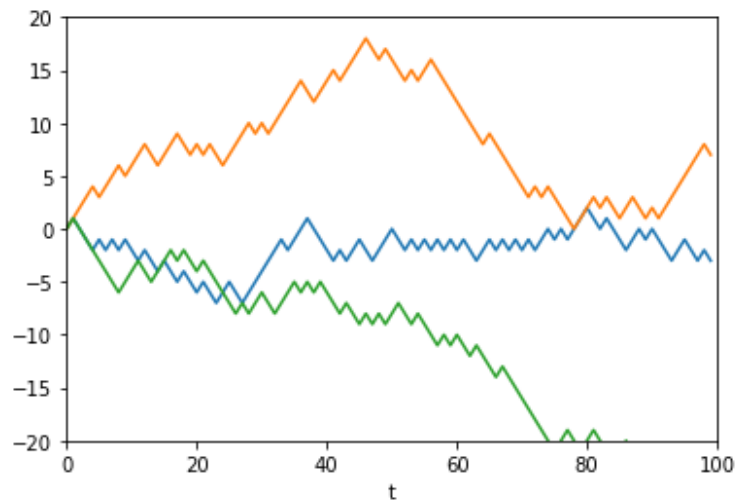
2.1.1 Random Walk

O termo *random walk* ou na tradução literal “passeio aleatório” foi introduzido pela primeira vez por Karl Pearson, em 1905. Passeio aleatório é o processo mais simples, conforme Figura 2, em cada intervalo de tempo de comprimento fixo, a variável irá aumentar um passo para cima ou para baixo, ou seja, cada *step* no processo tem 50% de chance de um movimento (HARRIS, 2006). Tem-se então a equação:

$$\Delta s = \pm \sigma \Delta t \quad (1)$$

Em que, σ é o tamanho do passo; e Δt é um passo infinitesimal pequeno.

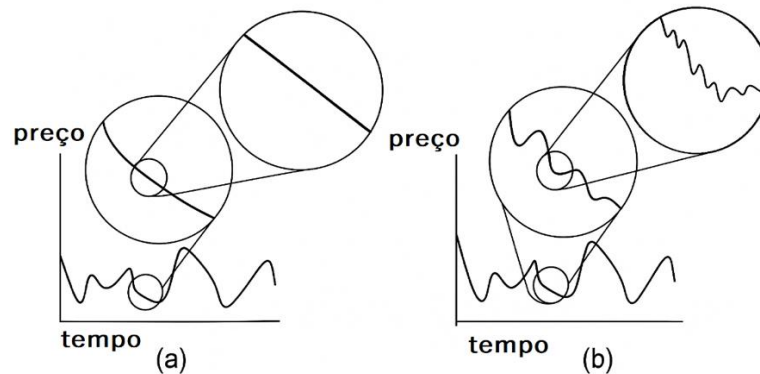
Figura 2 - *Random Walk* ou passeio aleatório



Fonte: Autora, (2025)

É fundamental entender o comportamento do movimento aleatório e saber que para cálculos estocásticos, o cálculo newtoniano infinitesimal não funciona, visto que para a suposição newtoniana (Figura 3) ao aproximarmos um período infinitesimal graficamente obtém-se linhas retas, isto não é verdade para um processo estocástico.

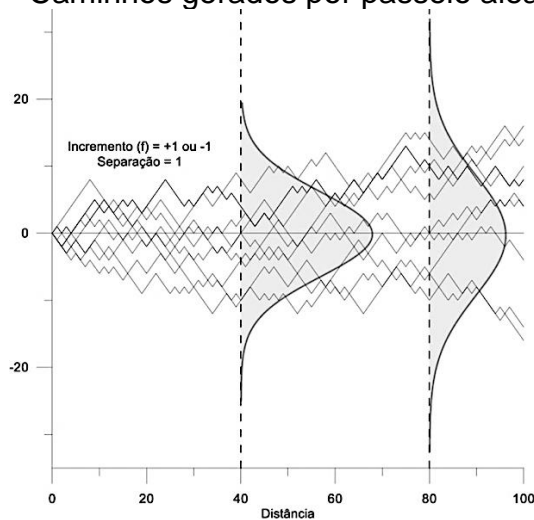
Figura 3 - (a) Comparação cálculo newtoniano e (b) Processos estocásticos



Fonte: Adaptado de HARRIS, (2006)

Dessa forma ao atribuir vários cenários gerados por processos estocásticos, como por exemplo o passeio aleatório na Figura 4, pode-se observar a formação de uma tendência de propagação do movimento destacada em duas áreas do gráfico em que a tendência pode ser estimada.

Figura 4 - Caminhos gerados por passeio aleatório



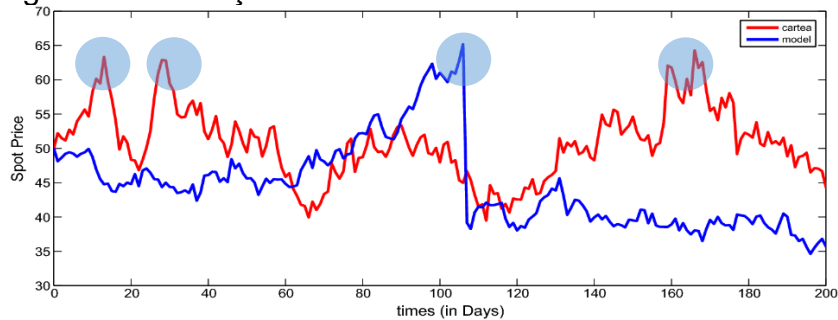
Fonte: Adaptado de CAIXETA, (2015).

2.1.2 Difusão de salto

A difusão de salto criada por Merton em 1976, é a união dos movimentos de Poisson e Brownianos. Em determinados mercados, o preço do ativo pode evoluir continuamente como um movimento browniano geométrico, ou seja, log-normal (assim como no mercado de energia elétrica), na maior parte do tempo, mas eventualmente pode sofrer grandes oscilações em decorrência de movimento raros (HARRIS, 2006; KEGNENLEZOM *et al.*, 2019). No mercado de energia elétrica

podemos entender os saltos, na Figura 5 e Figura 6 (a), ou grandes oscilações, como picos de demanda ou falhas em usinas ou em linhas de transmissão.

Figura 5 - Oscilações caracterizadas como difusão de saltos

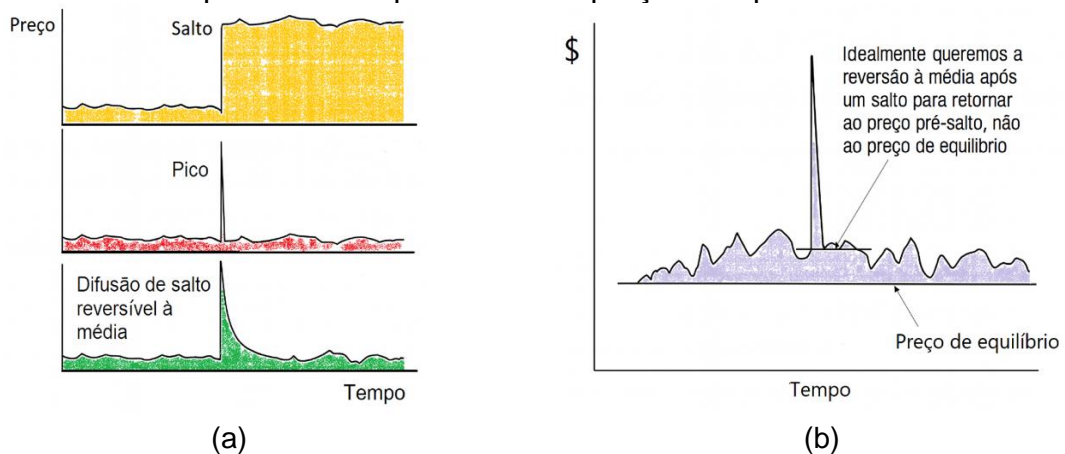


Fonte: KEGNENLEZOM et al., (2019).

2.1.3 Reversão à média

A análise normativa econômica geralmente decorre de algum tipo de preço de equilíbrio, em que a oferta e a demanda se mobilizam de tal maneira como mostrado na Figura 6 (b). Assim, o mercado parece amortecer o movimento do preço em direção ao preço de equilíbrio, isto é chamado de reversão à média (HARRIS, 2006).

Figura 6 - (a) Reversão a média com difusão de salto e (b) Amortecimento do preço após um salto permeando o preço de equilíbrio



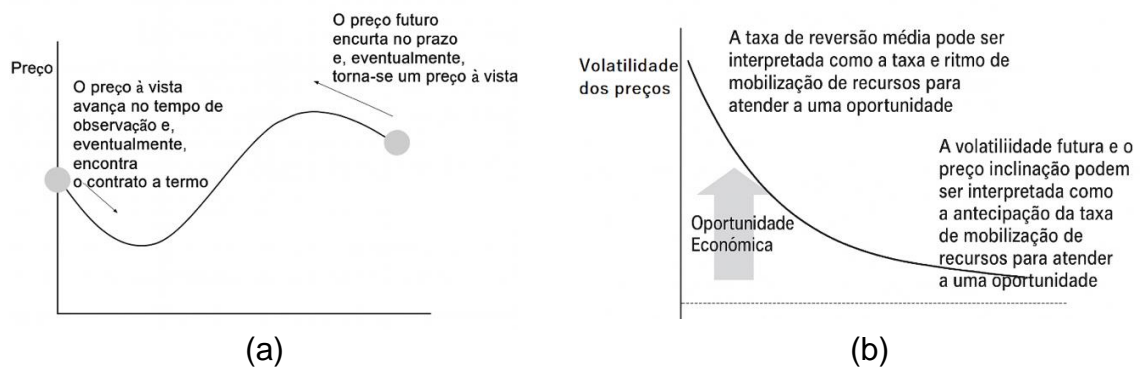
Fonte: Adaptado de (HARRIS, 2006).

2.2 Introdução aos aspectos da oportunidade econômica

A oportunidade econômica sobre o mercado de energia elétrica, principalmente sobre ao mercado *spot* (ou mercado a vista), pode ser obtida com o auxílio de técnicas de modelagens computacionais. Uma vez que há ferramentas para

análise do preço futuro no mercado *spot*, pode-se analisar o que poderá ocorrer com o preço, considerando dados históricos discretizados por submercados, estações e meses do ano com a finalidade de determinar uma tendência. O movimento futuro do preço apresenta o custo do risco (Figura 7a), uma análise mais assertiva de um indicador que representa oportunidade econômica (Figura 7b).

Figura 7 - (a) Representação do processo de preço atual e processo de preço futuro na curva de preço futuro e (b) Visualização da curvatura da inclinação para frente em termos de reversão da média do preço atual e preço futuro

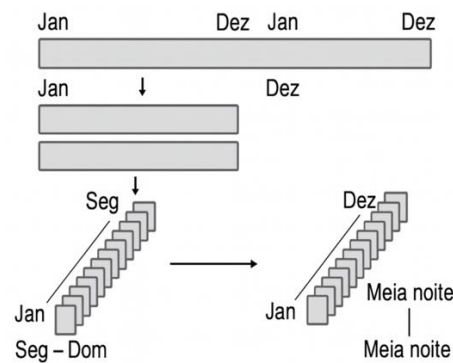


Fonte: Adaptado de Harris, (2006).

2.2.1 Periodicidade

O mercado de energia elétrica tem três períodos dominantes: sazonal, semanal e diário. Isto é muito favorável para discretizar os preços, como por exemplo por blocos de análise como o explicito na Figura 8.

Figura 8 - Discretização da periodicidade do mercado

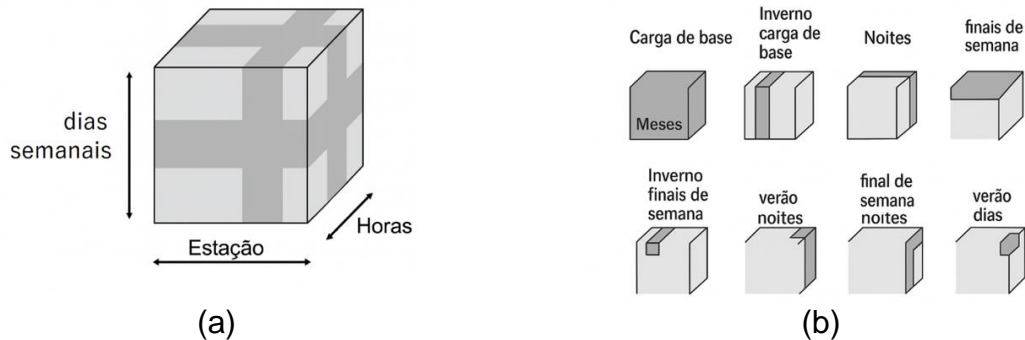


Fonte: Adaptado de Harris, (2006).

Ao empacotar os períodos diferentes, obtém-se um cubo como na Figura 9 (a), assim o preço em qualquer data particular é visto como um vetor de elementos

periódicos com cada um com uma volatilidade e uma correlação entre o prazo e outros elementos. Pode-se assim separar fatias desse cubo para expor análises por períodos específicos como meses, noites de verão, inverno aos fins de semana, etc. como mostrado na Figura 9 (b).

Figura 9 - (a) Cubo de periodicidade do mercado e (b) Representações de contratos padrões do cubo de preços



Fonte: Adaptado de Harris, (2006).

2.3 Introdução aos aspectos da volatilidade

A volatilidade é uma informação econômica de intensidade e frequência que representa as movimentações do valor de um determinado produto, dentro de um período de tempo, sendo possível interpretá-la *ex post* ou *ex ante*. Como *ex post* a volatilidade pode ser o desvio padrão dos retornos dos produtos (AIUBE, 2013; PILIPOVIĆ, 1998). Por exemplo, supondo uma série de preços normalizada em uma série de retornos, diários, como em:

$$\text{rentabilidade} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2)$$

Em que, P_t é o preço do produto no período t , e P_{t-1} no período anterior. Dessa forma, o desvio padrão dessa série de retornos do espaço amostral (\tilde{S}) é a volatilidade diária do produto, tal como (PILIPOVIĆ, 1998):

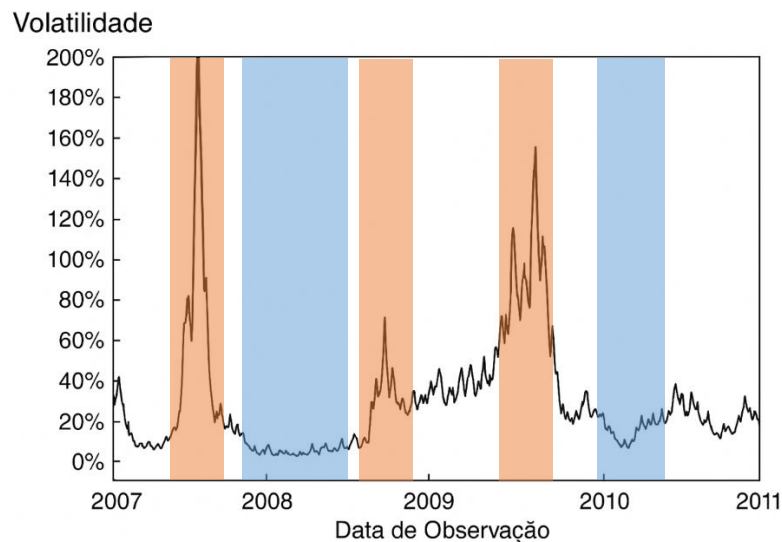
$$\sigma = \frac{STD \left(\frac{d\tilde{S}}{S} \right)}{\sqrt{dt}} \quad (3)$$

A volatilidade representa aproximadamente a porcentagem do preço dentro de um intervalo, por exemplo: as variáveis observáveis estão compreendidas em 66%

do tempo observado, então se a volatilidade do preço à vista for 10%, e se o preço à vista for atualmente \$20, então, no próximo período de tempo, pode-se aproximadamente esperar que o preço esteja dentro da faixa de \$ 18 a \$ 22 em 66% do tempo (PILIPOVIĆ, 1998).

Todavia, para obter uma previsão, ou seja, *ex ante*, são necessárias aplicações que por vezes não são triviais. Ao analisar uma série de preços histórica (Figura 10) pode-se, por exemplo, constatar períodos “calmos” (em azul) ou “mais agitados” (em laranja).

Figura 10 - Comportamento da volatilidade



Fonte: Adaptado de Arismendi et al., (2016).

Diante da identificação e da sazonalização destes períodos na Figura 10, pode-se usufruir de técnicas de agrupamentos de volatilidade (*volatility clustering*) como o GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) e o EWMA (*exponentially weighted moving average*) que são apresentados exhaustivamente em (HALKOS; TSIRIVIS, 2019; MANERA; NICOLINI; VIGNATI, 2016; MORETTIN; TOLOI, 2004; PUN; CHUNG; WONG, 2015; VIVIAN; WOHAR, 2012).

Supondo que a média dos retornos (μ) em um período de tempo seja igual a zero, isto é observado empiricamente na maioria dos ativos, aplicado com ressalvas ao produto energia elétrica, tem-se que a variância é obtida como:

$$VAR = \sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_{n-1}^2 \quad (4)$$

No EWMA (Média Móvel Exponencialmente Ponderada) é um método para estimar a volatilidade financeira com mais importância aos dados recentes e menos aos mais antigos, ou seja, médias móveis exponencialmente ponderadas, implica em atribuir maior importância) aos retornos mais recentes.

$$VAR(EWMA) = \sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda) \lambda^i \mu_{n-i}^2 \quad (5)$$

Os modelos autorregressivos com heterocedasticidade (ARCH) e os modelos ARCH Generalizados (GARCH) se caracterizam por uma dependência não-linear entre os retornos como uma função da dependência serial da variância condicional. Considera-se que a volatilidade em um dado instante de tempo depende dos valores históricos da série e que a determinação de estimadores de Máxima Verossimilhança dos parâmetros de modelos da família ARCH requer a maximização de uma função não-linear (MAIA, 2019; OLIVEIRA; GOMES; FILHO, 2025)

Os modelos da família ARCH supõem que a variância condicional depende de retornos passados, já o modelo de volatilidade estocástica (MVE) não faz esta suposição. Para o MVE a volatilidade depende de valores históricos de volatilidade, mas é independente do histórico de retornos (MORETTIN; TOLOI, 2004). Assim, para uma série X_t , tem-se:

$$X_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t \quad (6)$$

$$\sigma_t = e^{\frac{h_t}{2}} \quad (7)$$

Em que, ε_t é uma série estacionária com média zero e variância um; e h_t uma sequência com uma densidade probabilidade condicional. Os parâmetros da MVE são calculados por meio da expectância, variância entre outros com distribuição normal para sequência h_t e log-normal para a variância condicionada. Contudo, são de difícil estimativa e por vezes há solução através do procedimento de quase-verossimilhança por meio do Filtro de Kalman (MORETTIN; TOLOI, 2004).

Para obtenção de distribuição *a posteriore* de interesse podem ser utilizados o método de simulação MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) com o objetivo de simular uma cadeia de Markov irreduzível aperiódica cuja distribuição estacionária é a distribuição de interesse, ou seja, a distribuição *a posteriori*. Existem dois métodos para gerar cadeia de Markov com distribuição estacionária especificada: o *Metropolis-Hastings* e o *Gibbs Sampling* (LUNA, 2019).

Os modelos ARCH pode ser univariado ou multivariado (regressão múltipla para a série temporal Y_t com k variáveis independentes). O modelo GARCH, heterocedasticidade condicional autorregressiva generalizada, tem uma dificuldade de estimar todas as variáveis de parametrização com precisão (MAIA, 2019).

Para o estado-da-arte foram analisados inúmeros artigos, dentre os quais destacam-se o publicado por Pun, Chung e Wong, (2015) que apresenta um modelo de volatilidade estocástica multifator (SV) usufruindo de simulação Monte Carlo por meio de redes neurais. Entretanto a função multivariada não foi aplicada para o setor de energia elétrica, mas sendo promissor para demais *commodities*.

Vivian e Wohar, (2012) propuseram um modelo que examina se há quebras na volatilidade do retorno à vista de *commodities* usando um procedimento de soma de quadrados cumulativo iterativo e, em seguida, utilizando GARCH para volatilidade do modelo durante cada regime. O modelo implementado é baseado no *Bartlett kernel* com ajuste não-paramétrico de GARCH. Além disso, Bjerksund, Rasmussen e Stensland, (2010) analisam o preço a termo utilizando o modelo Balck'76 restrito à aplicação MCMC e processos gaussianos.

HALKOS; TSIRIVIS, (2019) analisam a volatilidade do preço da através do uso de variações do modelo do tipo GARCH e da metodologia *Markov-Switching*, testando vários modelos e procedimentos econométricos. Concluíram que para a *commodity* de energia a volatilidade dos preços exibe fortes sinais de memória longa e efeitos assimétricos. Portanto, independentemente de qual modelo de volatilidade é aplicado para medir e prever a volatilidade dos preços, é essencial primeiro testar a distribuição de retorno mais adequada. Os modelos de volatilidade baseados em GARCH são os mais comumente usados na academia, porém não há um aspecto conclusivo ou mesmo definitivo.

Manera, Nicolini e Vignati, (2016) aplicam modelos GARCH (GARCH-M, TARCH e EGARCH) para *commodities* energéticas como petróleo e gás natural, apesar de terem uma estrutura de mercado em oligopólio regulado a similaridade é restrita pois são estocáveis ao contrário da energia elétrica.

Hambly, Howison e Kluge, (2007) analisam o modelo de *spot price* que é o exponencial da soma de um *Ornstein-Uhlenbeck* e um processo de salto puro de reversão à média independente, aplicando um processo de distribuição *gamma* truncado para séries estacionárias e de distribuição exponencial para os saltos. Por fim, Arismendi et al., (2016) propõem um modelo de volatilidade estocástica sazonal para previsão dos preços de opções de futuros de gás natural negociadas, baseado em processos *Brownianos*.

2.4 Introdução aos aspectos da valoração das opções reais

Este tópico busca esclarecer questões sobre a modelagem matemática do comportamento de opções futuras em *commodities*. Entende-se por opção como o direito de comprar ou vender uma ação a um determinado preço em uma determinada data. Por definição, no mercado financeiro, uma opção é o direito de comprar ou vender uma ação a um determinado preço em uma determinada data. A respeito do comportamento (tendências de alta ou baixa), é válido ressaltar que todo movimento de uma opção estará sempre ligado ao movimento de um ativo subjacente, ou seja, as opções não se valorizam ou desvalorizam de forma independente.

O modelo de “Black e Scholes” é provavelmente o mais conhecido dentre os estudiosos do mercado financeiro, além de ser um dos primeiros desenvolvimentos com significativos/efetivos avanços acerca do tema. Na década de 70, Fischer Black e Myron Scholes iniciaram um projeto direcionado ao mercado financeiro com o intuito de desenvolver uma modelagem matemática que fosse capaz de valorar uma possível opção de preço futuro. Alguns anos depois Robert Merton passou a integrar parte da equipe e foi também peça fundamental para a execução e desenvolvimento do projeto (BLACK, 1976; BLACK; SCHOLE, 1974).

A maioria dos desenvolvimentos nesta área iniciaram pelo equacionamento matemático com 3 fontes principais de dados consolidados, sendo eles, preço *spot* (preço de uma ação hoje, preço à vista), preço *strike* (preço em exercício da ação, na

data de vencimento) e a própria data de vencimento. Usualmente, a aplicabilidade rotineira é junto aos casos de opções sobre o preço futuro de títulos, taxas de juros e câmbio (AIUBE, 2013).

Segundo Black, (1976) não há razão para acreditar que a existência de um mercado futuro tenha qualquer efeito previsível na trajetória do preço à vista ao longo do tempo. Portanto, assumindo que o a trajetória do preço é aleatória, o autor inspirou-se no movimento aleatório de moléculas e átomos no ar para tentar descrever o movimento do preço, o que é comumente conhecido como movimento geométrico *browniano*. De forma simplificada, pode-se dizer que o preço de uma ação no dia seguinte é moldado pelo preço da ação hoje mais uma componente aleatória que faz com que a ação aumente ou diminua. O conceito de aleatoriedade do movimento geométrico *browniano* quando visto sobre o modelo de precificação é dito como volatilidade. Dessa maneira, quanto maior é a volatilidade, maior serão os saltos aleatórios no dia seguinte.

$$w(x, t) = e^{r(t-t^*)} \cdot [xN(d_1) - c^*N(d_2)] \quad (8)$$

em que,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{x}{c^*} + \frac{s^2}{2} \cdot (t^* - t)}{\sqrt{s(t^* - t)}} \quad (9)$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{x}{c^*} - \frac{s^2}{2} \cdot (t^* - t)}{\sqrt{s(t^* - t)}} \quad (10)$$

Apesar de analisar matematicamente este modelo não seja o intuito do presente trabalho, vale ressaltar alguns pontos importantes levados em consideração no equacionamento. A equação facilita o cálculo do prêmio teórico da opção de compra e venda da ação, levando em consideração, principalmente, a volatilidade presente no movimento, que afeta diretamente o resultado do cálculo. Basicamente, a respeito da volatilidade, quanto maior for, maior também será o preço da opção. Apesar de ter sido um grande feito para o estudo de mercados futuros, a modelagem de Black e Scholes ainda carrega alguns “defeitos” que vêm sendo adequados ao longo do tempo de acordo com a necessidade e especificidade de cada problema

O modelo de Estrutura a Termo (HJM) possui as siglas HJM pois foi desenvolvido por Heath, Jarrow e Morton na década de 80. Neste modelo, ao invés de modelar inicialmente o preço à vista, o objetivo é modelar simultaneamente toda a curva futura/forward (AIUBE, 2013). Ou seja, a diferença entre os modelos de estrutura a termo e o modelo anteriormente apresentado, é que o modelo HJM captura toda a dinâmica da curva enquanto o modelo de Black e Scholes aborda apenas a dinâmica de um ponto da curva.

Uma análise mais aplicada deste modelo foi feita por Clewlow, Les e C. Strickland, (2000) onde eles apresentam a modelagem da estrutura a termo dos preços futuros para *commodities*. A estrutura da curva foi delineada para ser coerente com as volatilidades e correlações dos preços a prazo. Os autores mostram como as volatilidades do mercado podem ser estimadas e incorporadas no modelo com a finalidade de estimar a curva dos preços dos derivativos de energia.

Os modelos de Estrutura a Termo assumem que existem diversas fontes independentes de incerteza que impulsionam a evolução da curva direta (movimento geométrico *browniano*). Dessa forma, cada fonte de incerteza associada à curva é uma função de volatilidade que determina o quanto e em qual direção a chegada de informações associadas a uma fonte particular de incerteza pode afetar cada ponto da curva.

O modelo *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) aborda conceitos que foram vistos tanto nos estudos de Clewlow, Les e C. Strickland, (2000) quanto Black, (1976). Neste sentido, Gudkov e Ignatieva, (2021) propuseram um modelo que trata da análise de processos de difusão de salto de volatilidade estocástica no contexto de precificação de contratos futuros de eletricidade. Para a elaboração e publicação do estudo, diversos outros modelos previamente existentes foram analisados e “remodelados” para conseguir capturar as características mais proeminentes (reversão à média, sazonalidade, volatilidade e picos) do mercado *spot* de eletricidade da Austrália. Um diferencial neste estudo é que se assemelha com as características do mercado de energia elétrica brasileiro, é que Gudkov e Ignatieva, (2021) consideram os picos de preços, que são fenômenos característicos do mercado de eletricidade, devidos à impossibilidade de armazenamento de eletricidade. Para compor a bibliografia do trabalho de Gudkov e Ignatieva, (2021) a respeito da modelagem a partir de cadeias de Markov, Lucia e Schwartz, (2002) desenvolveram

um modelo de dois fatores que incorporam a componente de sazonalidade determinística e Roncoroni e Geman, (2006) prestam atenção especial à modelagem de picos nos mercados de eletricidade.

2.5 Conclusão

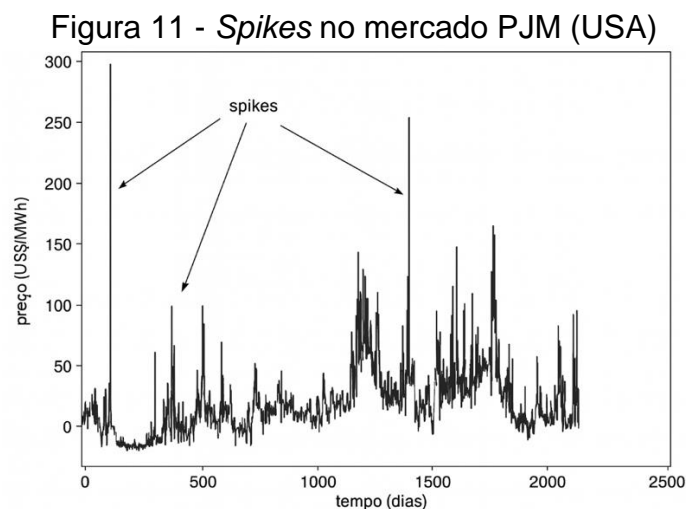
A modelagem analítica do comportamento do preço da energia é muito mais complexa que o de outras *commodities*. Usualmente, tem-se a característica não-Gaussiana gerada por saltos e/ou *spikes* e/ou volatilidade estocástica, deste modo ao usufruir de dados históricos dos preços futuros como variáveis observáveis existe a necessidade de processamento para estimação dos preços à vista. Nesse sentido, para a energia elétrica o processamento dificilmente será através do filtro de Kalman devido a não-Gaussianidade. Mas, pode ser útil o uso de filtro de partículas para o processamento, assim como maximização da verossimilhança, por uma função densidade Poisson-Gaussiana. Alguns modelos sugeridos são: (i) o processo de reversão com saltos e volatilidade determinística; (ii) o processo de reversão com saltos e com mudança de regime; e (iii) o processo de reversão com saltos e volatilidade estocástica. O primeiro modelo se baseia em processos Brownianos adaptados de MME (medida marginal equivalente) com distribuição de Poisson; o segundo modelo considera que a mudança de regime é observada em períodos que os preços estão fora de sua normalidade, sendo obtida por MCMC; e terceiro usufrui de métodos heurísticos incorporando as mudanças da demanda por energia elétrica.

O estudo de Gudkov e Ignatieva, (2021) conseguiu abordar simultaneamente todos os fatores de risco presentes no mercado de energia elétrica, sendo eles: sazonalidade, reversão à média, volatilidade estocástica, saltos na dinâmica do preço à vista de eletricidade, saltos no processo de volatilidade. Conquanto, ressalta-se que o comportamento do preço também deve ser ponderado sob a Teoria da Perspectiva Econômica, de acordo com Tversky e Kahneman, (2019), do agente de mercado, pois o movimento do preço é fruto do contexto social e econômico deste agente na tomada de decisão de acordo com Gudkov e Ignatieva, (2021).

3 COMPORTAMENTO DO MERCADO E CADEIAS DE MARKOV DE ORDEM OCULTA

A estrutura do mercado de energia elétrica não pode ser dissociada do recurso natural, em que pese a interpretação da eletricidade como *commodity* ela não é estocável em si. O entendimento de estoque é relativo apenas ao Capital Natural, por exemplo hídrico, sendo esta exclusividade de reservatórios de acumulação (SICA; CAMARGO, 2004). Segundo Faucheux e Noël, (1997) para compreensão do estoque de capital natural hídrico pode ser utilizado os métodos avaliação econômica de recursos exauríveis e não-exauríveis como por exemplo os modelos de *Hotelling* da área de econômica dos recursos naturais.

Desse modo, a energia elétrica pode ser compreendida como *commodity* não-estocável e negociada sob estrutura de mercado futuro ou à vista. Essa condição, dentre outras, é um dos motivos pela existência de saltos abruptos, *spikes*, no preço da energia elétrica no mercado brasileiro. Assim como em outros mercados como o PJM, apresentado na Figura 11 (HAMBLY; HOWISON; KLUGE, 2007).



Fonte: AIUBE, (2013).

Os *spikes* derivam, por vezes, da impossibilidade de estocar grandes blocos de energia em situações em que a redução da oferta provoca o aumento do preço, dado a incidência de maior inelasticidade do que elasticidade da demanda.

No ambiente de mercado futuro, os produtos são negociados antecipadamente, por meio de contratos, como volumes de energia elétrica para serem entregues em meses específicos, por exemplo: produto janeiro, produto fevereiro, etc. Um contrato de preço futuro (*forward price*) é um acordo de balcão entre

duas partes para um troca em algum momento futuro de produto, sendo que o valor é fixado no momento do contrato.

Entretanto, o mercado futuro não é o único ambiente de negociação dos produtos, há, também, o mercado *spot*, conhecido como mercado à vista, em que as liquidações dos contratos negociados são realizadas com um atraso muito curto, exemplo: dias. Nesse sentido, o operador de mercado (*trader*) ao optar pelo mercado à vista precisa desembolsar uma certa quantia financeira para adquirir o produto, ou recebendo imediatamente ao realizar sua venda. Já, ao optar pelo mercado futuro aceita fazer parte da negociação a prazo, ou seja, o *trader* fará a compra ou venda do produto de acordo com os valores pré-datados para dia estipulado ao encerramento do contrato - momento da entrega e da liquidação do produto.

Contudo, existem diferenças entre esses ambientes de mercado, tais como:

- a) o risco da contrapartida - no ambiente de mercado futuro há uma administração de risco, pois os negócios ocorrem no futuro, sendo essa administração no âmbito de que comprador tenha a garantia de que o vendedor estará com o produto a disposição para entrega, ao final do contrato; ou a garantia de que o vendedor terá o montante financeiro negociado; e
- b) o tempo da liquidação - no mercado *spot*, ou à vista, possui transações muito curtas, enquanto no mercado futuro, as operações ocorrem no futuro.

O *trader* nestes ambientes de mercado pode agir usualmente sobre os seguintes preceitos gerais:

- a) a operação de *hedge* - o objetivo de quem opera o mercado futuro como *hedger* é de proteção, exemplo: um investidor que tenha adquirido o produto no mercado à vista e quer se proteger de possível queda nos preços com a venda de um contrato futuro;
- b) a operação de especulação - o objetivo de quem opera em especulação, em oposição ao *hedger* que busca proteção, é obter retorno com a variação dos preços, ao mesmo tempo em que acaba gerando liquidez no mercado; e
- c) a operação de arbitragem - o objetivo de quem opera deste modo é obter vantagem com eventuais distorções nos preços entre o mercado à vista e futuro, ou entre diferentes submercados.

3.1 Cadeia oculta de Markov e preço a termo e futuro

Para entender a curva de preço futuro e seu comportamento é necessário saber que a energia elétrica gerada não é, em sua grande parte, armazenável. Ou seja, a própria energia elétrica quando gerada deve ser instantaneamente consumida (ressalva a casos de armazenamento com sistemas de baterias, no entanto estes não mais comuns em sistemas distribuídos). Existe uma diferença entre o produto e o fator de produção em relação a aplicabilidade de reservatório em uma usina hidroelétrica poder armazenar água, pois esta armazena a água que porventura num futuro próximo irá gerar energia elétrica, mas a eletricidade em si não está sendo armazenada (XIONG; MAMON, 2019).

O fato da energia elétrica não ser armazenável em larga escala está estritamente correlacionada com a alta volatilidade nos preços de energia elétrica. Resumidamente, a volatilidade mede a aleatoriedade em uma dada curva, e a volatilidade em mercados de eletricidade não é constante. A evolução dos preços da eletricidade apresenta acentuada reversão à média e padrões cíclicos, possui extrema volatilidade e picos de ocorrência relativamente frequente, e manifesta presença de propriedade de memória.

Com a problemática estabelecida da alta volatilidade no mercado de energia elétrica faz-se necessário um modelo de análise para esse mercado, que capture os pontos críticos da curva de preço futuro ocorridos no passado e exponha com confiabilidade o comportamento da curva futura de um contrato para os meses à frente assim como é exposto por Xiong e Mamon, (2019):

modelos capazes de capturar adequadamente o preço da eletricidade dinâmica para preços de contratos de eletricidade e gestão de risco são buscados [...]. No entanto, devido às características únicas dos preços à vista de energia elétrica, muitos modelos financeiros projetados para commodities regulares não podem ser necessariamente adaptados aos mercados de eletricidade.

Uma modelagem analítica que correlaciona os quatro principais efeitos presente na curva de preço de mercado, segundo Xiong e Mamon, (2019) são as *higher-order hidden Markov chain* (HOHMM), comumente denominadas de Cadeia de Markov Oculta de ordem Superior (HOHMM). Uma cadeia oculta de Markov pode ser considerada como Modelos Ocultos de Markov e considerados casos especiais de

Redes Bayesianas Dinâmicas, desenvolvidos em meados da década de 1960 (WAGHABI; BENEVIDES, 2009).

Esse é explicitamente um processo de variáveis dependentes de estados que estão disponíveis, mas de forma probabilística e oculta. A síntese do modelo oculto de Markov é descrita por Waghabi e Benevides, (2009) como a representação de uma variável aleatória por meio da “Cadeia de Markov (ou processo de Markov) com a propriedade particular de que tal variável não pode ser medida diretamente, mas sim através de observações possíveis a partir de cada estado da variável”.

De acordo com Guazzelli, (1993) um processo estocástico é um Processo de Markov quando satisfaz a seguinte condição, conhecida como Propriedade Markoviana: dado o conhecimento do estado presente (ou mais recente), a probabilidade condicional do estado seguinte é independente dos estados anteriores ao estado presente (ou mais recente). Isto é, para um processo Markoviano o importante não é o passado das amostras, e sim o presente, pois ele tem curta memória. Todavia, essa condição se difere para um modelo HOHMM, objeto deste trabalho. Além disso, uma Cadeia de Markov possui as seguintes propriedades: (i) espaço de estado discreto; (ii) propriedade Markoviana; e (iii) probabilidades de transição estacionária.

Espaço de estado discreto significa que o sistema pode estar em um de um número finito ou contável de estados. Por exemplo, um sistema de clima simplificado pode ter estados como "Ensolarado", "Nublado" e "Chuvoso", como demonstrado na Figura 12.

Figura 12 - Estados de transição em um sistema Markoviano e seus possíveis estados observáveis



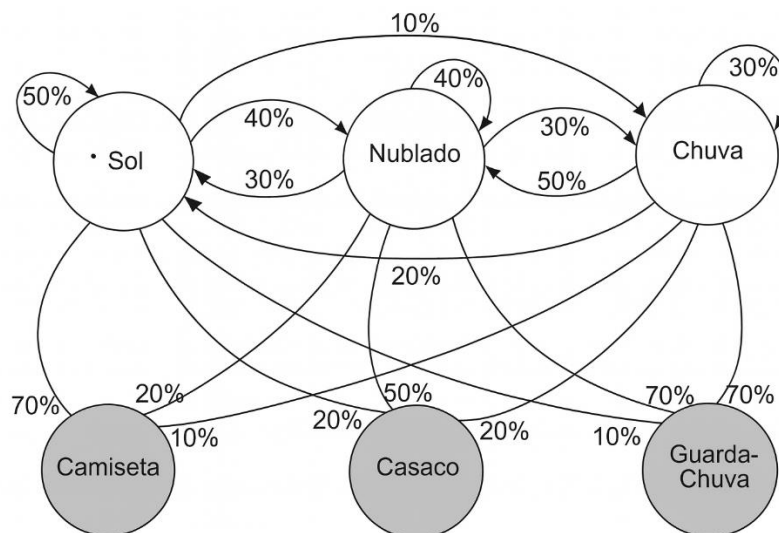
Fonte: Adaptado de Weisstein *et al.* (2021)

Uma probabilidade de transição estacionária é uma distribuição de probabilidades que permanece constante ao longo do tempo quando a Cadeia de Markov atinge o equilíbrio. Ela é importante para analisar o comportamento de longo prazo e para entender a estabilidade e a distribuição de estados em sistemas modelados por Cadeias de Markov.

Uma Cadeia de Markov simples é um meio matemático que descreve um sistema que transita de um estado para outro entre um conjunto finito ou infinito de estados, em que a probabilidade de transição para o próximo estado depende apenas do estado atual e não dos estados anteriores. Ou seja, o futuro é independente do passado, dado o presente (RABINER, 1989).

Já, uma Cadeia de Markov Oculta, Figura 13, funciona como o seguinte exemplo: supondo que uma pessoa está confinada em uma sala fechada com seus colegas de trabalho, mas esta pessoa não pode ver as condições climáticas pela janela, só pode deduzi-las a partir da roupa e acessórios que seus colegas de trabalho vestem. Assim ao final do dia esta pessoa consegue uma previsão do que pode acontecer com as condições climáticas no dia seguinte.

Figura 13 - Representação de uma Cadeia Oculta de Markov



Fonte: Waghbi e Benevides, (2009)

No estudo apresentado por Xiong e Mamon, (2019), o HOHMM é apresentado como um "estado do mundo" resultante da interação de várias forças que impactam o mercado de eletricidade. Os autores desenvolveram filtros "para gerar

estimativas ótimas de quantidades relevantes para HOHMM usando o processo de observação, e estes fornecem estimativas online dos parâmetros do modelo”.

O HOHMM aplicado aos mercados de energia elétrica apresenta, em teoria, boa adaptabilidade aos principais efeitos presentes na curva de mercado de energia elétrica: sazonalidade, picos, reversão à média e volatilidade não constante. Esses efeitos são absorvidos como memórias pelo HOHMM. Xiong e Mamon, (2019) definem o HOHMM como um processo estocástico duplamente embutido que possui uma série de observações e uma cadeia de Markov não observada subjacente. A distribuição de probabilidade da transição de estado da cadeia de Markov no presente depende não apenas do estado mais recente, mas também de estados em tempos anteriores. O principal objetivo é obter a melhor estimativa do estado atual ou futuro da cadeia de Markov, que representa o estado "filtrado" ou "previsto" do mercado ou sistema econômico. Esta estimativa é realizada por meio das expectativas condicionais das funções da Cadeia de Markov e os preços *spot* de eletricidade observados que são considerados como um desdobramento da interação de muitos fatores latentes, como ações dos participantes do mercado, produção e consumo, condições climáticas, rede de transmissão, etc. Em nosso contexto, a configuração HOHMM é projetada para capturar a presença de memórias nos preços do mercado de eletricidade que fornecerão informações adicionais na estimativa e previsão de regimes econômicos e outros parâmetros do modelo.

3.2 Modelo de Cadeia Oculta de Markov

O Modelo Oculto de Markov (*Hidden Markov Model* - HMM) foi formalmente introduzido e desenvolvido na década de 1960 e início da década de 1970. Os trabalhos fundamentais que estabeleceram a base teórica e as aplicações práticas dos HMMs foram realizados principalmente por Leonard E. Baum, segundo Rabiner e Juang, (1986). Leonard E. Baum também desenvolveu o algoritmo *Baum-Welch* utilizado até os dias atuais para a implementação de um HMM.

O Modelo Oculto de Markov (HMM) é utilizado para modelar processos que são governados por um processo Markoviano embutido, no entanto com uma dificuldade adicionada: o sistema modelado não pode ser diretamente observado. Este processo evolui pelo tempo por meio de transições entre seus estados, sendo

que os estados são responsáveis pela emissão de sinais observáveis, sendo a observação uma função de probabilidade.

De acordo com Ynogui, (1999) um HMM é definido como um par de processos estocásticos (X, Y) . O processo X é uma cadeia de Markov de primeira ordem, e não é diretamente observável, enquanto o processo Y é uma sequência de variáveis aleatórias que assumem valores no espaço de parâmetros observados (as observações). Assim, um HMM é um processo estocástico de dupla camada, na qual um processo estocástico subjacente e não-observável (oculto) pode ser apenas observado pelo outro processo estocástico que produz as sequências de observações (RABINER, 1989). Um exemplo abordado por Rabiner, (1989) tem como base o sorteio de bolas: tendo uma sala com N urnas, e dentro das urnas, M bolas de diferentes cores, então se uma pessoa escolhe uma urna inicial e dentro desta urna uma bola é também escolhida por acaso, a cor desta bola se torna a observação de um processo. A bola é recolocada em sua urna e então uma nova urna é escolhida aleatoriamente de acordo com alguma distribuição de probabilidades associada com a atual urna e uma bola é escolhida aleatoriamente, observa-se a cor e a recoloca em sua urna. O processo é repetido muitas vezes e, portanto, gera uma sequência de observações constituída pelas cores das bolas. Esse processo pode ser representado por um HMM visto que o processo observável representa a cor da bola e o processo não-observável representa cada uma das urnas.

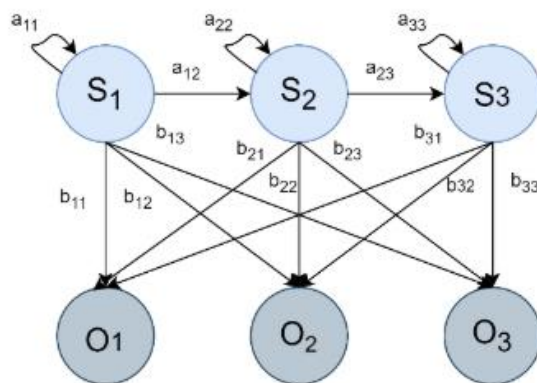
De acordo com Rabiner e Juang, (1993) os processos do mundo real geralmente produzem resultados observáveis que podem ser caracterizados como sinais. Os sinais podem ser de natureza discreta (por exemplo, caracteres de um alfabeto finito, vetores quantizados de um livro de códigos, etc.), ou contínuo em natureza (por exemplo, amostras de fala, medições de temperatura, música, etc.). A fonte do sinal pode ser estacionária (ou seja, suas propriedades estatísticas não variam com o tempo) ou não estacionária. (ou seja, as propriedades do sinal variam ao longo do tempo). Os sinais podem ser puros (isto é, proveniente estritamente de uma única fonte), ou pode ser corrompido por outras fontes de sinal (por exemplo, ruído) ou por distorções de transmissão, reverberação, etc.

Pode-se caracterizar os elementos de um HMM (Figura 14) por:

- a) N é o número de estados do modelo, denominados por S ;

- b) M é o número de símbolos observáveis distintos por estado, denotado por O ;
- c) A é a matriz de probabilidade de transição de estados, sendo apenas de um estado para outro;
- d) B é a matriz de probabilidade de variáveis observáveis, de emissão de estados, sendo as probabilidades de saídas que interligam os estados ocultos as observações;
- e) π é a distribuição da probabilidade inicial de estado, sendo a probabilidade que cada estado terá como partida; e
- f) λ é o modelo contendo todos os seus elementos.

Figura 14 - Possíveis transições (a) e emissões (b) de estados



Fonte: (LIMA *et al.*, 2023)

Como mostrado na Figura 14, a transição de estados sempre terá um número discreto de transições. Já, as emissões, conforme Tabela 1, podem conter variáveis observáveis discretas ou contínuas.

Tabela 1 - Matriz de emissões para o HMM

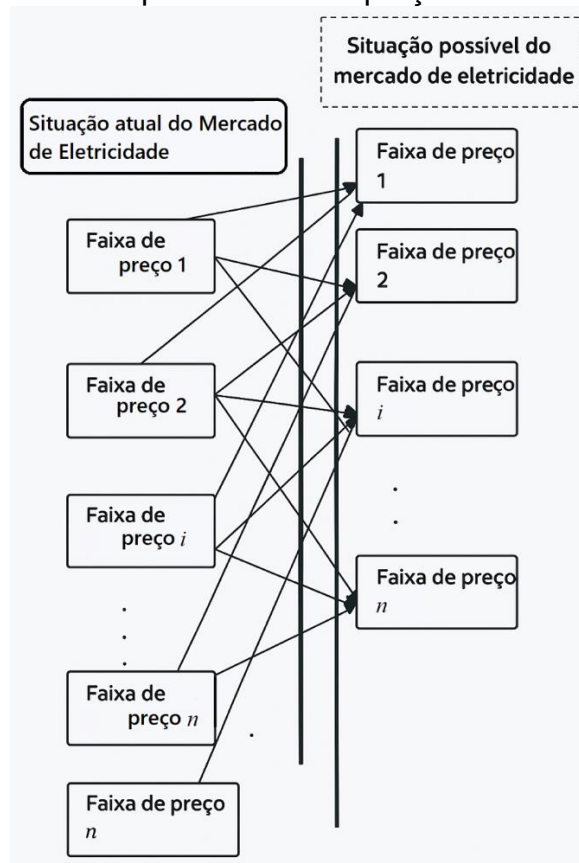
Elementos	O_1	O_2	O_3
S_1	b_{11}	b_{12}	b_{13}
S_2	b_{21}	b_{22}	b_{23}
S_3	b_{31}	b_{32}	b_{33}

Fonte: (LIMA *et al.*, 2023)

Para a matriz B , Tabela 1, com emissões contínuas, tem-se que cada componente da matriz, b_{11} a b_{33} , são descritos por funções no tempo. Assim, pode-se elencar três problemas fundamentais para criar um HMM: (i) na avaliação da probabilidade (ou verossimilhança) de uma sequência de observações dado um HMM específico; (ii) a determinação de uma melhor sequência de estados do modelo; e (iii) o ajuste dos parâmetros do modelo considerando o sinal observado.

Halilčević e Gubina, (2011) apresentam um algoritmo para previsão de curto prazo dos preços do *European Power Exchange* (EPEX), que é o mercado de energia elétrica que opera em alguns países da Europa. Os intervalos de previsibilidade do trabalho destes autores são diários e semanais, baseado na simulação de Monte Carlo e Cadeias de Markov. A previsão foi realizada, entretanto, sem considerar variáveis além do histórico de preço, como variáveis meteorológicas, níveis de demanda, instabilidades políticas e sociais, etc. mostrados na Figura 15.

Figura 15 - Possíveis transições dos estados do mercado de energia caracterizadas pelas faixas de preços

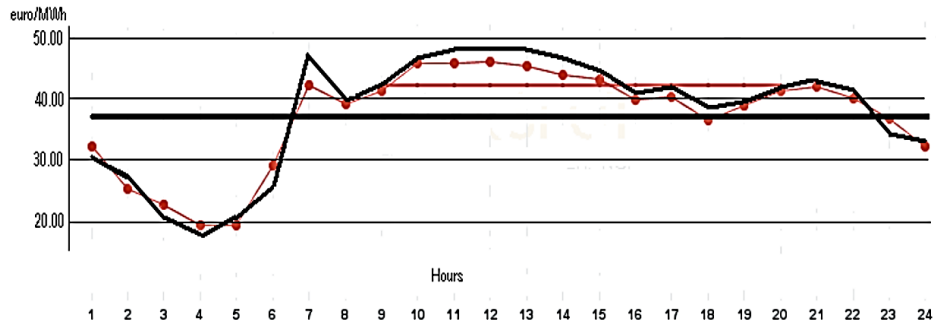


Fonte: adaptado de Halilčević e Gubina, (2011).

Os resultados de Halilčević e Gubina, (2011) são apresentados na Figura 16, em que a linha vermelha pontilhada representa os valores históricos observados e a

linha preta continua os valores previstos pelo modelo. Assim, quando comparados com modelos tradicionais como ARX e ARIMA e demonstraram um certo sucesso.

Figura 16 - Curva de preço



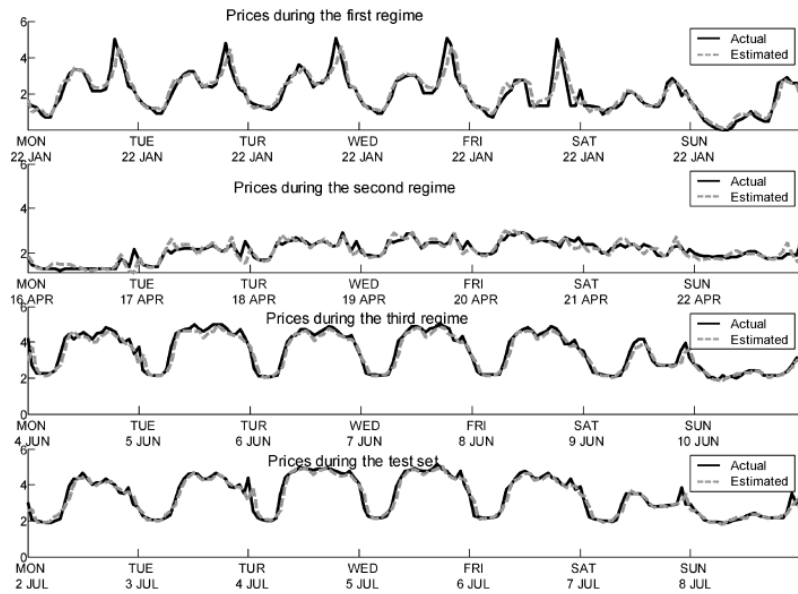
Fonte: adaptado de HALILČEVIC; GUBINA, (2011).

A Cadeia de Markov descreve estados de um sistema em sucessivos intervalos de tempo em que o estado de mercado pode mudar ou permanecer o mesmo. A escala de ordem (1ª, 2ª, 3ª, etc.) da Cadeia de Markov depende da quantidade de estados de observação/transição identificados. Nesse caso, Halilčevic e Gubina, (2011) propuseram a cadeia de Markov de primeira ordem, onde somente o histórico de preço é definido como informação de entrada do algoritmo. Halilčevic e Gubina, (2011)

González, San Roque e García-González, (2005) elaboraram um estudo considerando a incerteza de variáveis exógenas, como demanda de energia, disponibilidade de água em reservatório e custos com combustíveis em casos em que há necessidade. A estratégia de previsão adotada pelos participantes foi o Modelo de Markov Oculto Input-Output (IOHMM). O IOHMM provê informações dinâmicas sobre o mercado, e não sendo restrito apenas ao preço à vista. Nesse caso, diferentes estados de mercado foram identificados e representam a relação entre as variáveis exógenas e o preço à vista através de um modelo de regressão dinâmica.

O modelo de González, San Roque e García-González, (2005) obteve sucesso ao ser aplicado na análise de preços no mercado de energia elétrica da Espanha, fato que já era esperado pois o modelo não fornece apenas uma previsão pontual do preço em um intervalo de tempo, mas também uma estimativa de incerteza, Figura 17. Por fim, o IOHMM pode ser entendido como um modelo de regressão dinâmica por partes, onde o modelo mais adequado é ativado automaticamente pelo estado oculto da Cadeia de Markov.

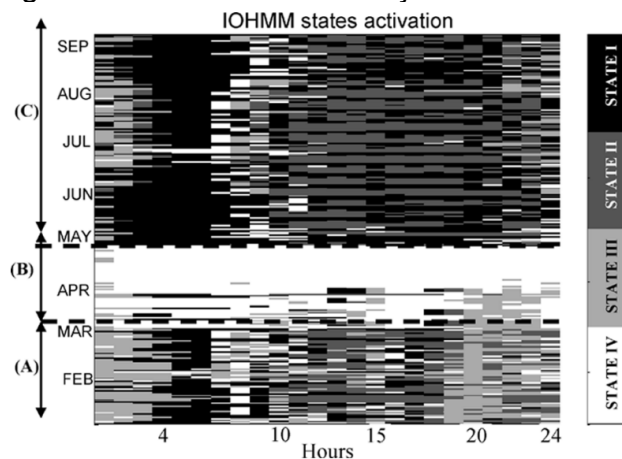
Figura 17 - Resultado dos preços previstos por IOHMM



Fonte: adaptado de González, San Roque e García-González, (2005).

A identificação da ativação de cada período está relacionada com a ocorrência de episódios semelhantes nas variáveis de entrada. Como mostra a Figura 18, a ativação do período “A” está ligada à não ocorrência de mudanças abruptas das variáveis. O período “B” marca um período de transição. O período “C” está relacionado à um aumento da variação dos preços.

Figura 18 - Estados de ativação IOHMM

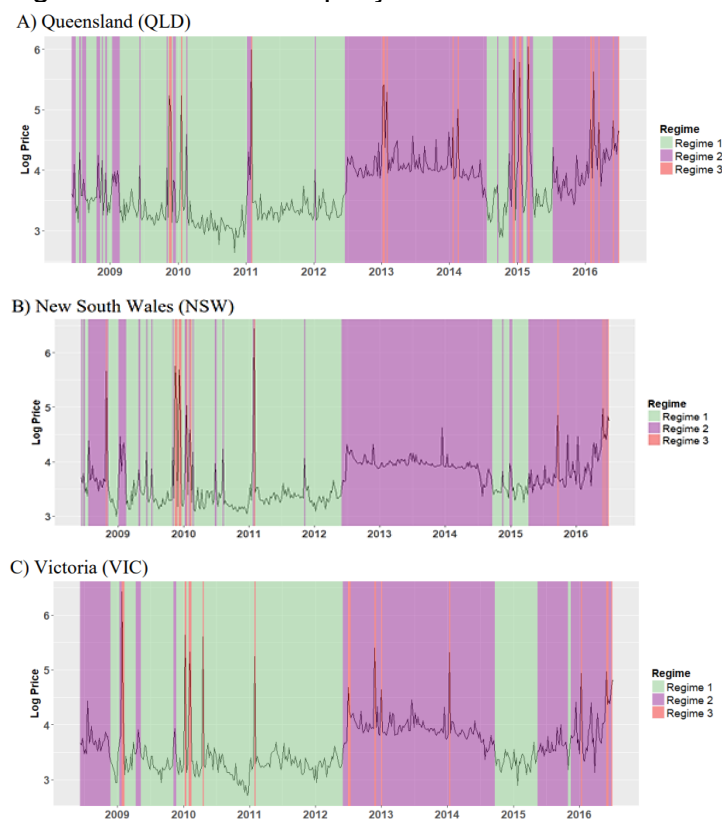


Fonte: adaptado de González, San Roque e García-González, (2005).

Apergis et al., (2019) desenvolveram um trabalho com base no modelo semioculto de Markov para analisar a acurácia da previsão de preço no mercado de energia elétrica Australiano. Sabe-se que, ao contrário de outras *commodities*, a

eletricidade não pode ser armazenada e seu intervalo entre geração e utilização é imediato, logo, é comum observar flutuações abruptas, extremas e pontuais nas curvas de preços. O intuito dos autores foi adequar essas características de picos, considerando que por ser instantâneo e momentâneo, não ocasionam mudanças no nível temporal do preço, uma vez que decai rapidamente e não acarreta elevação, de fato, do nível sustentável do preço (Figura 19). Para tanto, utilizaram o *Hidden Semi-Markov Model* (HSMM) por ser mais flexível do que o HMM comum. A distribuição do tempo de permanência no HSMM pode ser caracterizada por qualquer distribuição, seja paramétrica ou não paramétrica, facilitando a modelagem para as características específicas dos preços de energia elétrica, como pico de curta duração e média variável no tempo.

Figura 19 - Curvas de preço e estados observados



Fonte: adaptado de APERGIS et al., (2019).

O trabalho de APERGIS et al., (2019) foi realizado utilizando um HSMM de três níveis e nos resultados das estimativas foram encontradas evidências de que os três níveis ocultos correspondem à um regime de preço baixo, preço alto e pico. Executando o algoritmo, foi possível encontrar sistematicamente o tempo dos três regimes diferentes e vincular os resultados experimentais às mudanças exógenas

(neste caso, políticas) no mercado de eletricidade australiano. Porém, o estudo é limitado ao considerar que a análise da relação de interferência de fatores externos necessita de observações e considerações formais para ser estabelecida, portanto, foi considerado que um trabalho futuro pode apoiar-se no desenvolvimento de métodos econométricos formais para estudar a relação causal entre os fatores exógenos e a transição de diferentes regimes ocultos.

3.3 Descrição Metodológica Proposta

A descrição metodológica deste trabalho explica os métodos e procedimentos utilizados para conduzir a pesquisa. Explica os porquês de se trabalhar com dados de VWAP e o procedimento para obtenção de um dos bancos de dados implementados e a importância para este trabalho, seguidamente a importância da granularidade dos dados obtidos em questão.

3.3.1 Volume Weighted Average Price (VWAP)

O *Volume Weighted Average Price* (VWAP), ou Preço Médio Ponderado por Volume, Eq. 11, é uma medida técnica usada em finanças que representa a média ponderada dos preços de uma ação ou outro ativo financeiro durante um período específico, ponderada pelo volume de negociação.

$$VWAP_t = \frac{\sum_i (P_{i,t} \cdot V_{i,t})}{\sum_i V_{i,t}} \quad (11)$$

Em que, $P_{i,t}$ é o preço de negociação da posição i em um dia, t , $V_{i,t}$ é o volume de negociação da posição i em um dia, t , e $VWAP_t$ é o preço médio ponderado por volume em um dia, t .

O *VWAP* é amplamente utilizado em diversos contextos no mercado financeiro, desempenhando um papel crucial na tomada de decisões de *trading*. Uma das principais utilizações do *VWAP* é na identificação do preço justo de um ativo (ANTONIO; TICONA, 2023; BIAŁKOWSKI; DAROLLES; LE FOL, 2005).

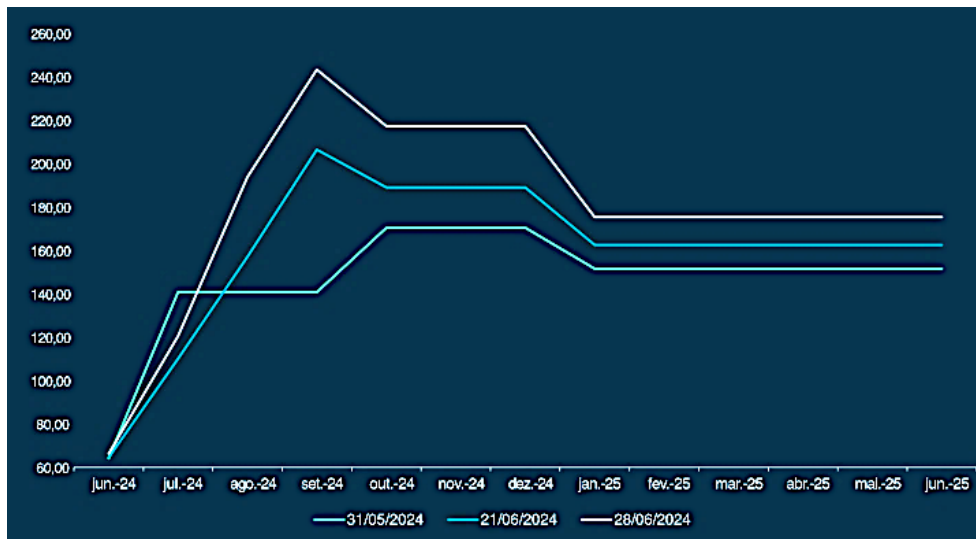
Traders frequentemente analisam se o preço atual de um ativo está acima ou abaixo do *VWAP* diário para determinar condições de sobre compra ou sobre

venda. Quando o preço de um ativo está acima do VWAP, isso pode ser interpretado como uma condição de sobre compra, sugerindo que o ativo pode estar sendo negociado a um preço superior ao seu valor médio ponderado por volume. Por outro lado, se o preço está abaixo do VWAP, pode ser considerado uma condição de sobre venda, indicando que o ativo está sendo negociado a um preço inferior ao seu valor médio ponderado por volume (ANTONIO; TICONA, 2023; BIAŁKOWSKI; DAROLLES; LE FOL, 2005).

Além disso, grandes investidores institucionais utilizam o VWAP como uma ferramenta essencial na tomada de decisão em *trading*. O objetivo é minimizar o impacto no mercado de grandes ordens de compra ou venda. Ao se basearem no VWAP, esses investidores podem garantir que suas transações estão ocorrendo próximas ao preço médio do mercado, evitando movimentos abruptos de preço que podem ocorrer devido ao alto volume de negociação.

O VWAP também serve como um importante *benchmark* de desempenho. É utilizado para avaliar a eficiência da execução de ordens, comparando o preço de execução com o preço médio ponderado por volume. Se uma ordem é executada a um preço próximo ou igual ao VWAP, isso indica que a transação foi realizada de forma eficiente, refletindo o preço médio do mercado durante o período analisado. Portanto, o VWAP não só fornece *insights* valiosos sobre a dinâmica de preços, mas também serve como um padrão de referência para medir a eficácia das estratégias de *trading* (BIAŁKOWSKI; DAROLLES; LE FOL, 2005)

Um exemplo de utilização do VWAP é na curva *Forward* na BBCE, um componente fundamental do mercado de energia elétrica no Brasil. Esta curva fornece uma representação gráfica dos preços futuros esperados para a energia elétrica em diferentes períodos, desempenhando um papel crucial na negociação e gestão financeira dos contratos futuros de energia, como mostrado na Figura 20.

Figura 20 - Exemplo de curva *forward* para três semanas

Fonte: BBCE, (2024).

A curva *forward* é uma ferramenta que mostra os preços futuros da energia elétrica para diversos períodos, como dias, meses ou anos. Esses preços são derivados de contratos futuros negociados no mercado de energia. A curva reflete as expectativas do mercado quanto à oferta e demanda futura, condições climáticas e políticas regulatórias, e ajuda a prever o comportamento dos preços ao longo do tempo (BBCE, 2025). A curva *forward* é importante pois tem diversas aplicações práticas no mercado de energia elétrica. Para os participantes do mercado, como geradores, distribuidores e consumidores, ela é essencial para o planejamento financeiro e a gestão de riscos (ARAUJO, 2020; BBCE, 2025).

Ao prever os preços futuros, as empresas podem implementar estratégias de *hedge* para se proteger contra flutuações inesperadas nos preços da energia. Além disso, a curva *forward* serve como um ponto de referência para a precificação de contratos futuros, garantindo transparência e eficiência no mercado.

3.3.2 Base de dados

Neste trabalho foram utilizados dados obtidos diretamente da BBCE, e fornecidos por um agente comercializador. É importante ressaltar que apenas comercializadoras cadastradas na BBCE podem obter dados do balcão de comercialização. A BBCE é uma plataforma essencial para a negociação de energia

elétrica no Brasil. Entre os diversos produtos negociados, o produto mensal se destaca pela sua relevância na gestão do consumo e produção de energia elétrica, sendo também um dos mais utilizados em volume pelos *traders* de energia elétrica. E, este foi escolhido para ser utilizado neste trabalho.

Um produto mensal na BBCE é um contrato de compra e venda de energia elétrica com período de entrega definido para um mês específico. Esse contrato estabelece a quantidade total de energia elétrica a ser fornecida durante o mês, geralmente expressa em megawatts-hora (MWh). O preço é acordado entre as partes no momento da negociação, proporcionando previsibilidade financeira e segurança para geradores, comercializadores e consumidores (LUZ; GOMES; BRANDÃO, 2012).

Além disso, os produtos mensais podem especificar um perfil de carga, que determina se a energia será fornecida de forma constante ou com variações ao longo do mês. Essa flexibilidade permite atender às diferentes demandas do mercado. A energia elétrica negociada pode ser convencional, proveniente de fontes tradicionais, ou incentivada, oriunda de fontes renováveis, como eólicas e solares.

Um produto trimestral refere-se a um contrato de compra e venda de energia elétrica com um período de entrega de três meses consecutivos. Esse tipo de contrato é essencial para os participantes do mercado que buscam uma gestão mais abrangente e estratégica de suas necessidades. Na BBCE os produtos mais comuns são aqueles com períodos de entrega mensais, trimestrais e anuais. Produtos com períodos de entrega de 100 dias específicos não são tipicamente padronizados na plataforma. No entanto, a BBCE oferece flexibilidade para a negociação de contratos personalizados conforme a necessidade dos participantes do mercado.

Tendo em vista essa formação dos produtos de energia e que será utilizado o produto mensal, propõe-se no modelo gerar dados de 15 dias, 30 e 100 dias de previsão para com o intuito de auxiliar o agente comercializador na negociação de produtos mensais.

As métricas MBE (*Mean Bias Error*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*), MSE (*Mean Squared Error*) e RMSE (*Root Mean Squared Error*) serão utilizadas nesse trabalho para avaliar a precisão e a eficácia de modelos preditivos na análise de dados e serão utilizadas com a finalidade de comprovar a eficácia do

modelo proposto (ROBERTO *et al.*, 2023): A MBE mensura o viés médio das previsões, indicando se um modelo tende a superestimar ou subestimar os valores reais. Isso ajuda a identificar e corrigir tendências sistemáticas nos erros do modelo (ROFATTO; MATSUOKA; KLEIN, 2025). A MAPE expressa o erro absoluto médio em termos percentuais, facilitando a interpretação da precisão relativa das previsões, independentemente da escala dos dados (ROBERTO *et al.*, 2023). A MSE e a RMSE avaliam a magnitude dos erros de previsão. Enquanto a MSE calcula a média dos quadrados dos erros, a RMSE fornece a raiz quadrada dessa média, mantendo a unidade original dos dados (ROBERTO *et al.*, 2023).

3.4 Conclusão

O *Volume Weighted Average Price* (VWAP) é uma ferramenta essencial no mercado financeiro, usada para determinar o preço justo de um ativo, identificar condições de sobre compra ou sobre venda e servir como referência para decisões de trading. Traders e grandes investidores institucionais utilizam o VWAP para analisar se o preço atual está acima ou abaixo do preço médio ponderado por volume, o que indica potenciais movimentos de mercado e ajuda a minimizar o impacto de grandes ordens. Além disso, o VWAP atua como *benchmark* para avaliar a eficiência na execução de ordens, garantindo que transações sejam realizadas próximo ao preço médio do mercado, o que favorece a estabilidade e a suavização das operações. Um exemplo prático de sua aplicação está na curva *Forward* da BBCE, importante para a negociação e gestão financeira de contratos futuros no mercado de energia elétrica brasileiro.

Além disso, ambas métricas mencionadas são cruciais para quantificar a dispersão dos erros e identificar grandes desvios entre valores previstos e observados. Essas métricas juntas oferecem uma visão abrangente sobre a performance do modelo, permitindo ajustes e melhorias contínuas na análise de dados (BOTCHKAREV, 2019).

4 PROCEDIMENTOS, SIMULAÇÃO E RESULTADOS

O objeto desta seção é tratar da consolidação metodológica em duas frentes. A primeira se refere a análise de informações junto a BBCE com a finalidade de encontrar comportamentos cíclicos ou mesmo similares. Nessa frente, serão utilizadas técnicas de agrupamento (*clustering*) que sejam exequíveis através de métodos matemáticos analíticos quando confrontado com o comportamento correlatado da precipitação acumulada prevista sob um horizonte de 15 dias. Desse modo, as ferramentas de inteligência computacional foram aplicadas para quatro variáveis: preço, volume, energia natural afluenta e precipitação, considerando para cada produto o volume acumulado de negociação, $V_t [MWh]$, no dia, t ; os preços médio, $s_t^{med} [R\$]$, máximo, $s_t^{max} [R\$]$, mínimo, $s_t^{min} [R\$]$, de abertura, $s_t^{abr} [R\$]$ e de fechamento, $s_t^{fch} [R\$]$, no dia, t ; a energia natural afluenta bruta observada, $ENA_t^{bru.obs} [MW_{med}]$ no dia, t , e a precipitação acumulada prevista para os próximos 15 dias, $P_{t+15}^{acm.prev} [mm]$.

A segunda frente, refere-se sobre a aplicabilidade e modelagem matemática e computacional do método *Hidden Markov Chain Model* (HMM) e suas derivações de base estatísticas. A finalidade é aprofundar o conhecimento sobre como e o que alinhar para a modelagem analítica com a finalidade de obter previsibilidade de tendências ou de frustrações no mercado de energia elétrica brasileiro, seja para o *spot* ou para o mercado futuro.

4.1 Análise de dados brutos e aspectos hidrológicos correlatos

O mercado de energia brasileiro tem suas idiosincrasias, o que acarreta incertezas específicas para os agentes de mercado devido aos diversos detalhes do modelo regulatório vigente no Brasil, que diverge dos demais países e outras *commodities* de mercados. A análise e previsão do preço do produto futuro ou curva *forward* é um problema enfrentado pelos agentes (principalmente agentes comercializadores) e devido a isto, alguns agentes optam por estudar exclusivamente os movimentos do mercado no intuito de mitigar os possíveis riscos na gestão de portfólio.

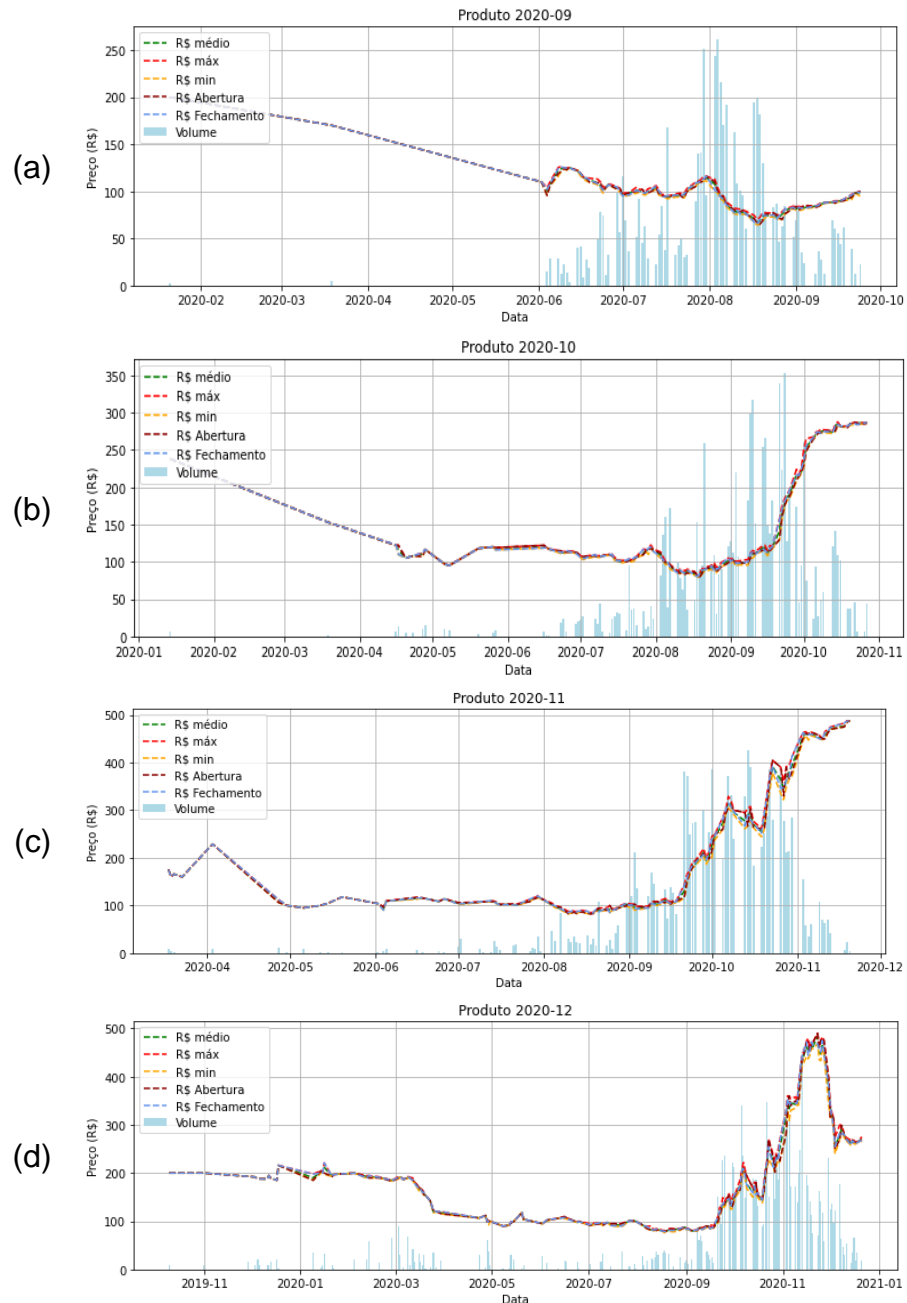
Ao analisar o movimento do mercado considerando os contratos firmados na BBCE (balcão brasileiro de comercialização de energia), sabendo que a maioria das operações do ACL é realizada no mercado de balcão e as partes envolvidas são as únicas que têm acesso a esses dados, existe uma falta de transparência no mercado e assimetria de informação (FELIZATTI *et al.*, 2019). Caso se tenha acesso às informações de preço e quantidade negociada no balcão, seria possível formar vetores de informações e, a partir de então, formar a curva de oferta de mercado (difere da curva de oferta energia elétrica, operacionalizada pelo ONS) por meio de métodos de regressão e possivelmente, também pela da curva da oferta de mercado, utilizar técnicas de agrupamento como o *clustering* para similaridade e agrupamento da oferta.

O *clustering*, ou análise de agrupamento, tem por princípio básico colocar em um mesmo grupo objetos que sejam similares de acordo com algum critério pré-determinado (LINDEN, 2009). Ao fazer uso desse método, pode-se extrair características que antes não eram tão explícitas dos dados e a partir disso formular hipóteses para facilitar a compreensão de análise.

Nesse estudo, as informações de preço foram obtidas através do Balcão Brasileiro de Comercialização de Energia (BBCE) para o submercado SE/CO. O horizonte de tempo analisado foi o maior possível diante da consistência de informações, porém, neste trabalho, são oriundos do período de 24/06/2019 à 11/08/2021, discretizados diariamente: preço médio do dia, t , precipitação prevista acumulada a partir do dia, t , e volume de negociação no dia, t . As informações de ENA bruta observada foram coletadas diariamente para o mesmo período junto ao Operador Nacional do Sistema elétrico (ONS). As informações sobre as precipitações foram obtidas pelo cenário ECWMF-ENS e utilizadas individualmente e coletivamente para as bacias/sub-bacias: Araguaia, Grande, Paraná, Paranaíba, Paraíba do Sul, Paranapanema, São Francisco, Teles Pires, Tiete, Curuá-Una, Iguaçu e Tocantins. A escolha dessas regiões hidrográficas ocorreu em virtude das importâncias direta, para o submercado analisado, e indireta, ao considerar pressões sobre o comportamento de preço, fruto de gargalos de transmissão ou de importação/exportação entre submercados.

Desse modo, a partir das informações da BBCE, foi possível construir gráficos dos comportamentos dos produtos negociados. Assim, na Figura 21, tem-se especificamente a evolução dos preços e dos volumes negociados para os produtos de setembro a dezembro de 2020.

Figura 21 - Comportamento dos produtos setembro a dezembro de 2020



Fonte: Autora (2025)

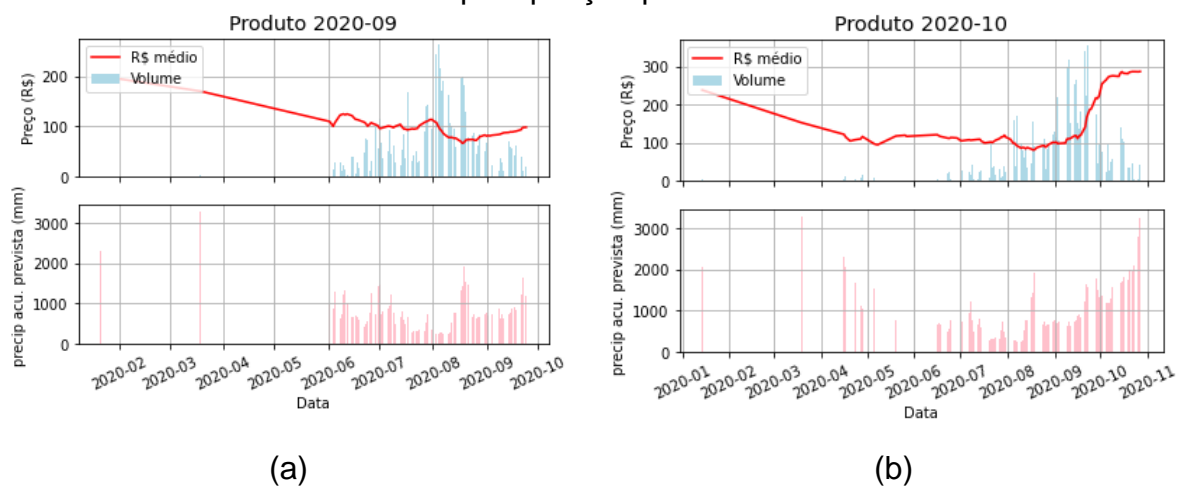
Ao analisar o comportamento dos produtos, verifica-se que o volume transacionado tem forte influência no movimento de preços do mercado. Contudo, como pode ser analisado junto ao produto setembro/2020, Figura 21 (a), os

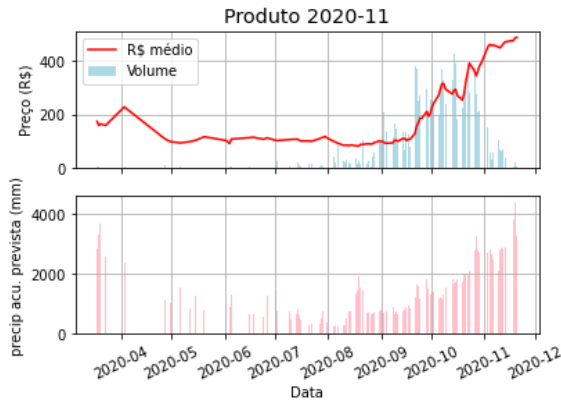
movimentos dos preços não são necessariamente ascendente frente aos produtos outubro, novembro e dezembro/2020, Figuras 21 (b), (c) e (d), respectivamente. Isto ocorre, pois os volumes transacionados não são mutuamente exclusivos, de compra ou de venda, mas, sim de ambas as possibilidades. Ou seja, um agente pode comprar e vender um volume no mesmo dia ou durante o período de vida do produto.

O tempo de vida de cada produto energético é considerado do primeiro ao último registro de transação, por meio do preço (R\$/MWh) e do volume transacionado (MWh médio). A precipitação prevista acumulada (mm) é correlata ao período de cada produto, sendo organizada de maneira coletiva, totalizando as precipitações individuais das bacias, porém não-sazonalizadas. Desse modo, é necessário associar mais uma variável para obter a direção do movimento de preço, tal como a precipitação prevista no dia da negociação, Figura 22.

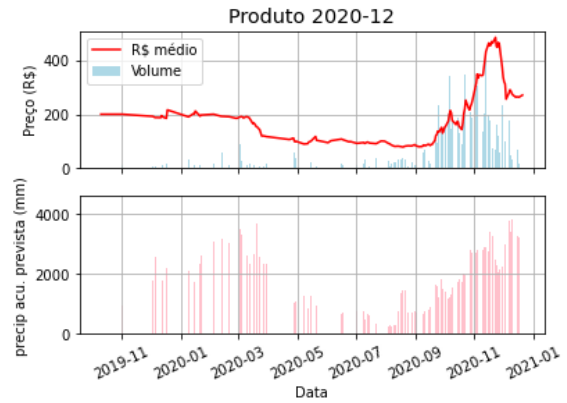
Como pode ser observado junto ao produto setembro/2020, Figura 22 (a), a direção do movimento do preço ora é inversa ao movimento da precipitação e, ora não. De maneira análoga, nos produtos outubro, novembro e dezembro/2020, Figura 22 (b), (c) e (d), respectivamente, verifica-se um movimento ascendente do preço face a ascendência da precipitação prevista acumulada próximo a liquidação do produto, porém com forte ascendência do volume negociado. Diante disso, em que pese uma relação intuitiva e inversa entre a precipitação prevista e o preço, esta análise não pode excluir o movimento do volume transacionado de forma sistêmica. Cabe ressaltar que a não-sazonalização das informações de precipitação tem influência na interpretação do movimento e direção do preço.

Figura 22 - Comportamento dos produtos setembro a dezembro de 2020 associado a precipitação prevista





(c)



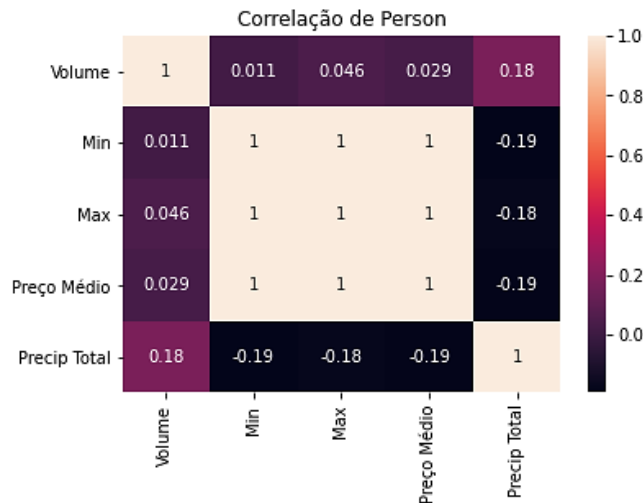
(d)

Fonte: Autora (2025).

Entretanto, deve-se considerar que as análises referentes ao comportamento e movimento dos preços face a precipitação ainda são preliminares e carecem de um aprofundamento do agrupamento acumulado plotado. Outra maneira de analisar a interdependência entre as variáveis é aplicar as técnicas de inteligência computacional com a finalidade de verificar a correlação. O coeficiente de correlação possui significância estatística e o seu sinal indica a direção do comportamento das variáveis em estudo, já a magnitude do coeficiente indica a extensão da relação.

Dentre os métodos mais utilizados e abordados estão os coeficientes de correlação de *Pearson* (Figura 23) e de *Spearman* (Figura 24). A correlação de *Pearson* trata de uma relação linear entre variáveis contínuas e o de *Spearman* de relação monotônicas linear ou não-linear entre variáveis contínuas ou ordinais.

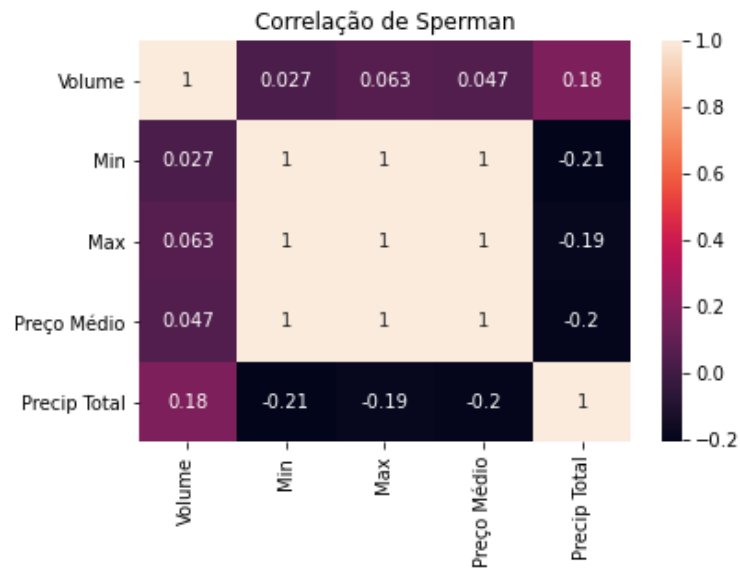
Figura 23 - Correlação de Pearson entre preço e precipitação



Fonte: Autora (2025)

O coeficiente de *Spearman* pode contribuir mais assertivamente, pois as variáveis em estudo (preço, volume e precipitação) tendem para um movimento na mesma direção relativa, mas não necessariamente a uma taxa constante (ORIGUELA, 2018). Observa-se, na Figura 23 e na Figura 24, a correspondência inversa entre o preço e a precipitação prevista, apesar de baixa. Na análise estatística podem existir pares de variáveis que apresentam forte dependência natural.

Figura 24 - Correlação de *Spearman* entre preço e precipitação

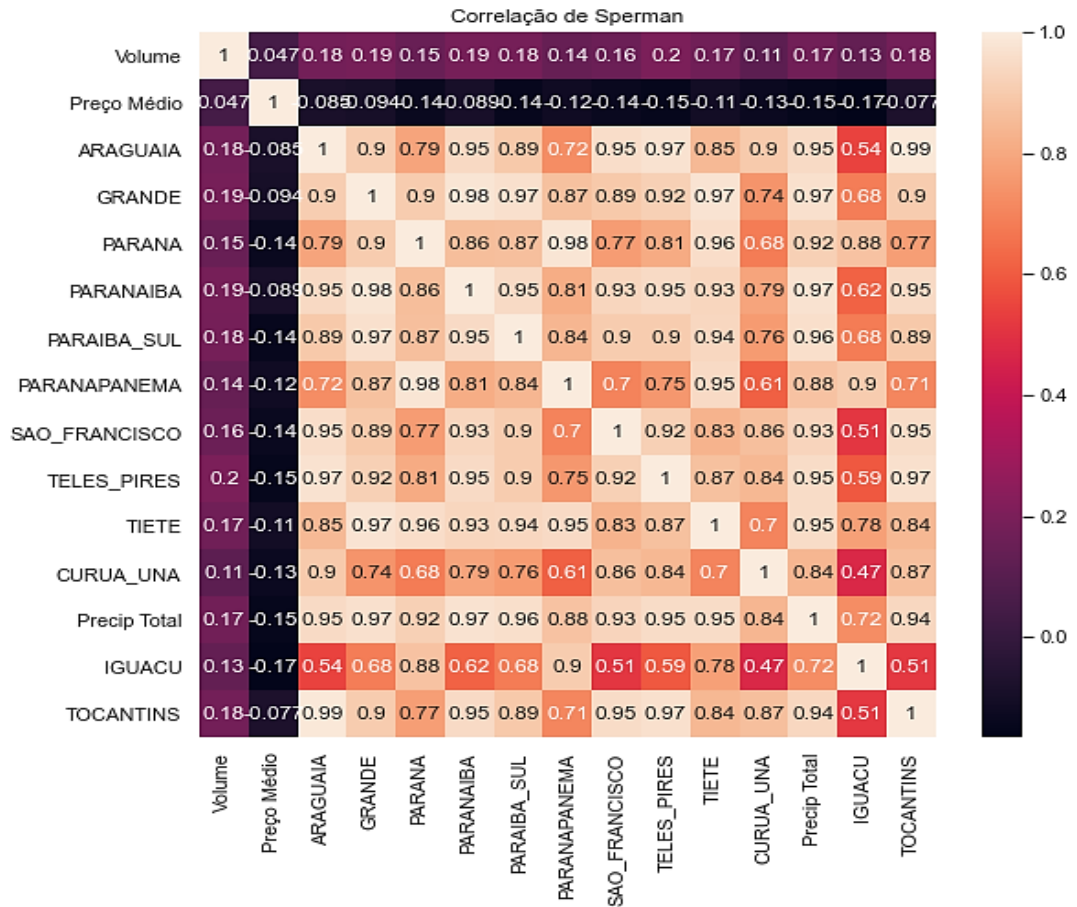


Fonte: Autora (2025)

Nota-se, na correlação de *Spearman*, Figura 24, uma relação mais intensa entre a precipitação prevista acumulada total (considerando todas as bacias) e o preço mínimo, indicando a tendência de que uma redução do preço mínimo é proporcionalmente maior que a redução do preço máximo diante de um aumento na precipitação prevista. Porém, cabe atentar para não-sazonalização da informação de precipitação e que a informação de preço é “um recorte” diante da amplitude do mercado de energia, pois, por exemplo, não são considerados informações de leilões e negociações bilaterais fora do ambiente da BBCE.

De forma análoga ao realizado para precipitação prevista acumulada de todas as bacias escolhidas, também, foi efetuado para cada bacia individual, Figura 25, pelo coeficiente de *Spearman*. Outrossim, a ENA observada das bacias foi confrontada com o preço médio do submercado SE/CO com a finalidade de verificar a correlação entre os fenômenos econômico e ambiental, Figura 26.

Figura 25 - Correlação de Spearman entre Bacias, precipitação, preço médio e volume

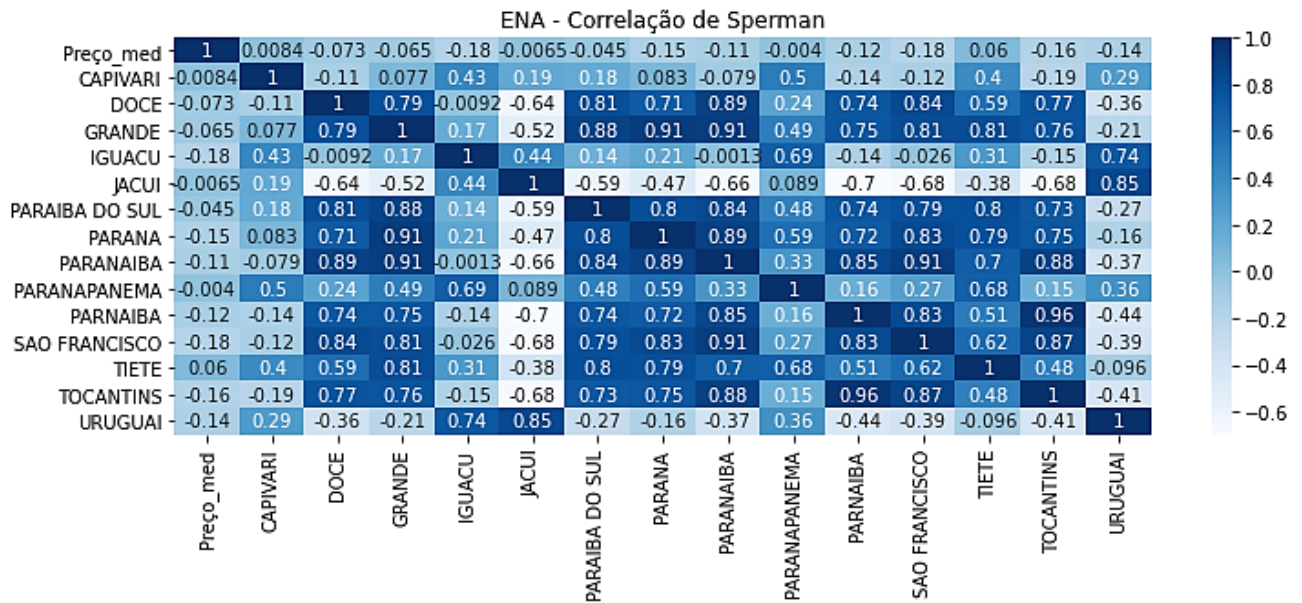


Fonte: Autora (2025)

Nesse sentido, para o coeficiente de Spearman entre o preço médio e a precipitação prevista acumulada, Figura 25, as bacias Teles Pires e Iguaçu demonstram maior sensibilidade ao preço. Porém, ressalva-se que, ao analisar as correlações individuais, as bacias hidrográficas da região Sul não possuem uma sazonalidade tão característica quanto às bacias da região Sudeste, por exemplo. Deste modo, ao não-sazonalizar as informações de precipitação, pode-se distorcer ou, ao menos, comprometer uma análise quantitativa, entretanto a análise qualitativa pode revelar a interdependência dos fenômenos.

Por sua vez, ao verificar o coeficiente de correlação de Spearman, Figura 26, entre os fenômenos de preço e de ENA, as bacias Iguaçu, São Francisco e Tocantins indicam uma maior sensibilidade. Portanto, constata-se que a não-sazonalização da precipitação contribui diretamente para um resultado aquém do esperado.

Figura 26 - Correlação de Spearman entre o preço médio e a ENA em Bacias



Fonte: Autora (2025)

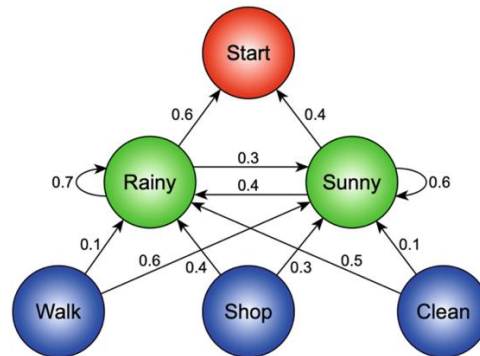
A ENA, assim como a Energia Armazenada (EAR), podem ser fenômenos muito relevantes para uma avaliação multivariada, todavia a EAR podem ser afetada por procedimento regulatórios alheios ao uso eficiente do capital natural hídrico ou mesmo do despacho energético do ONS. Tversky e Kahneman, (2019)

4.2 Modelo de Cadeias Ocultas de Markov

Para a modelagem de um sistema formado de cadeias ocultas de Markov é necessário prospectar o ambiente ou plataforma de programação, pois isto pode afetar as escolhas de variáveis e seus comportamentos na inclusão da modelagem matemática analítica. Usualmente na área de programação se depara com três variações de emissões para o HHM que precisam ser decididas para a inicialização da construção do modelo: (i) Modelo oculto de Markov com emissões gaussianas; (ii) Modelo oculto de Markov com emissões de mistura gaussiana; e (iii) Modelo oculto de Markov com emissões multinominais (discretas). Outra decisão é com relação se haverá uma matriz de distribuição de ocupação do estado inicial e uma matriz de probabilidades de transição entre estados inicial, calculadas sobre probabilidades específicas para uma condição inicial (ou por meio de outros fenômenos, acarretando multinível) ou se essa informação é autogerada pelo próprio HHM. Na Figura 27, por exemplo, a matriz de distribuição de ocupação do estado inicial pode ser vista na

primeira camada da Rede Bayesiana e é composta pelas linhas somando 1 a partir dos estados iniciais. Já, a matriz de probabilidades de transição entre estados inicial é mostrada pelas linhas e devem também somar 1 para cada estado secundário.

Figura 27 - Exemplo Modelo Oculto de Markov



Fonte: Macleod, (2020).

Na Figura 27, em exemplo, tem-se dois estados iniciais ocultos e três estados observáveis. As probabilidades de transição entre os estados podem ser fornecidas ou autogeradas, sobretudo para os estados observáveis. Para o Modelo Oculto de Markov proposto ainda devem ser estabelecidos quais serão esses estados.

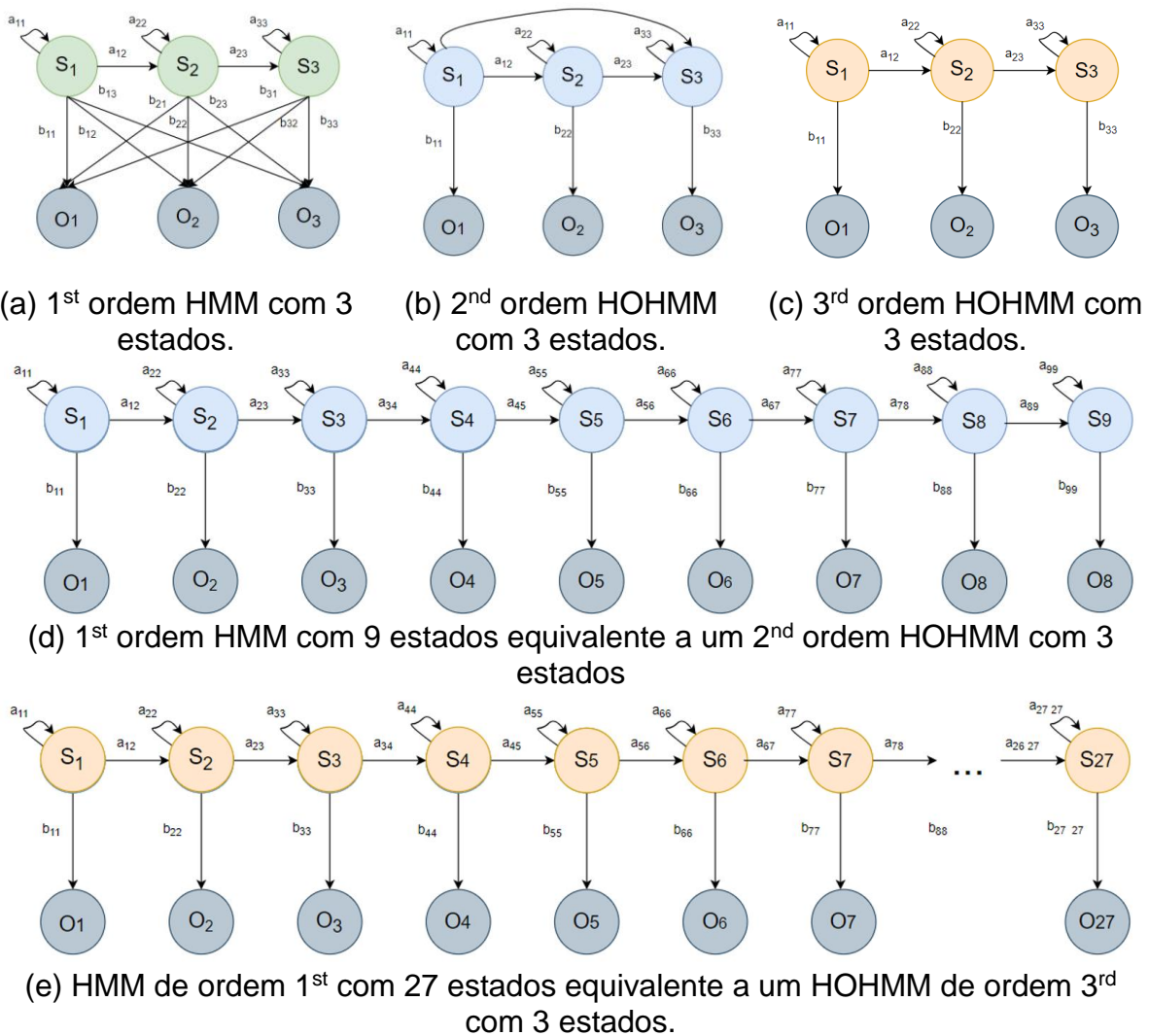
Também existem três problemas fundamentais para os HMMs, citados por Rabiner, (1989) e Bilmes, (1998), que são: (i) estimar os parâmetros do modelo a partir dos dados observados; (ii) estimar a sequência ótima dos estados ocultos; e (iii) calcular a probabilidade do modelo, a partir dos dados observados e de parâmetros do modelo. Os parâmetros do modelo podem ser encontrados por um algoritmo iterativo *Expectation-Maximization* (EM), conhecido como algoritmo *Baum-Welch*, fornecido, em muitos casos, em bibliotecas de linguagens de programação. Os demais problemas podem ser resolvidos pelos algoritmos de programação dinâmica conhecidos como algoritmo de *Viterbi* e algoritmo *Forward-Backward*, também fornecidos e com bibliotecas de linguagem de programação, principalmente linguagens voltadas para análise estatística.

4.2.1 Condições de implementação

A primeira etapa é identificar os estados existentes no modelo, juntamente com as sequências de observações associadas a cada estado, como mostrado, por

exemplo, em um modelo de primeira ordem, na Figura 28 (a). Considera-se dois HOMCs para melhor precisão: um modelo de segunda ordem com três estados, na Figura 28 (b) e um modelo de terceira ordem com três estados, na Figura 28 (c). Há um modelo HMM de primeira ordem na Figura 28 (a), em que cada estado depende do estado imediatamente anterior: a_{11}, a_{22}, a_{33} representam as probabilidades de permanecer no mesmo estado, e a_{12}, a_{23} são as probabilidades de transição entre os estados, de S_1 para S_2 e S_2 para S_3 . As variáveis b_{12}, b_{13} são probabilidades de emissão de um estado para uma observação com S_1 para O_1, O_2, O_3 . Da mesma forma, há b_{21}, b_{22}, b_{23} e b_{31}, b_{32}, b_{33} para as outras transições de estado para observação.

Figura 28 - Ilustração do modelo de cadeia de Markov oculta de alta ordem.



Fonte: (LIMA *et al.*, 2023)

O modelo da Figura 28 (b) apresenta um componente de memória, pois o terceiro estado depende não apenas das informações de S_2 do segundo estado, mas

também de S_1 do primeiro estado. Na Figura 28 (c), o modelo de terceira ordem deve ter um componente de memória no qual qualquer estado depende dos três estados anteriores. Entretanto, nessa condição específica de modelagem, Figura 28 (c), o HOHMM de terceira ordem tem apenas três estados, de modo que não recebe informações de três estados anteriores por falta de quantidade suficiente, semelhante a um modelo HMM de primeira ordem. Comparando a Figura 28 (b). e a Figura 28 (c), pode-se esperar que o modelo com melhores resultados seja o HOHMM de segunda ordem porque ele tem um componente de memória adicional, enquanto o HOHMM de terceira ordem é reduzido a um simples HMM de primeira ordem (LIMA *et al.*, 2023).

4.2.2 Definição de estado

Nesta etapa, foi agrupado os estados de ordem superior para formar estados de primeira ordem. Cada estado de primeira ordem é uma combinação de estados de ordem superior. Nos modelos de segunda e terceira ordem propostos, 27 estados de primeira ordem foram usados para obter equivalência com o modelo de terceira ordem. Portanto, cada estado é um conjunto de três estados consecutivos do modelo de terceira ordem, resultando em 3^3 estados compostos possíveis. Para o modelo de segunda ordem, há: 3^2 , ou nove estados conforme Figura 28 (d) e a Figura 28 (e). Na Figura 28 (d) e na Figura 28 (e), há a representação equivalente dos modelos de ordem superior. A Figura 28 (d) mostra que um modelo HMM de 9 estados pode incorporar a memória de estados anteriores. A Figura 28 (e) ilustra o equivalente de primeira ordem de um HOHMM de terceira ordem com três estados. No entanto, um HOHMM de terceira ordem com três estados é semelhante a um HMM porque tem menos de 4 estados para incorporar a memória de terceira ordem. Neste trabalho foi modelado a transformação com 27 estados para o HOHMM de primeira ordem a fim de tornar o modelo um concorrente mais robusto em comparação com a transformação do HOHMM de segunda ordem.

4.2.3 Identificação de novas probabilidades de transição e emissão

Essa etapa envolve três estágios: (i) avaliar a probabilidade da sequência de observação; (ii) ordenar hierarquicamente a sequência de estados por meio da

decodificação; e (iii) otimizar os parâmetros do modelo e maximizar a probabilidade da sequência de observação por meio do treinamento.

O algoritmo *Forward-Backward* se aplica à etapa de avaliação. Foi usado o algoritmo *Viterbi* para a etapa de decodificação (KHODJA *et al.*, 2023) e o método *Baum-Welch* na etapa de treinamento (Gavrikov, Mezentseva e Sinetsky, 2023). O algoritmo *Baum-Welch* é uma variação do algoritmo *Expectation-Maximization* (EM) projetado para treinar HMMs. Ele estima os parâmetros do HMM (probabilidades iniciais, matriz de transição e probabilidades de emissão) com base nos dados observados e opera em quatro etapas: (i) a inicialização, que realiza as estimativas dos parâmetros iniciais do modelo de várias maneiras, dependendo do tipo de HMM e dos dados; (ii) a expectativa, que calcula as estimativas das probabilidades de transição e das probabilidades de emissão com base nos dados de treinamento e nos parâmetros atuais do modelo; (iii) a maximização, que atualiza os parâmetros do modelo (incluindo a matriz de transição) com base nas estimativas calculadas na etapa de expectativa, maximizando a função de probabilidade dos dados; e (iv) a iteração, que continua a executar as etapas de expectativa e maximização até que os parâmetros atinjam um valor ideal ou até que um critério de parada seja atendido.

4.3 Análise e testes da implementação

Com base em estudos e ferramentas desenvolvidas em um HMM para calcular o preço de ações do mercado de ações, foi alinhado uma implementação análoga do modelo de HMM para o mercado de produtos futuros. A precipitação acumulada, assim como o ENA, influencia proporcionalmente na formação dos preços de mercado futuro de energia elétrica. Na Figura 22 (c), mostra-se um exemplo claro para o produto de novembro de 2020, onde a precipitação de chuva acumulada em torno do mês de novembro é correlata com grandes movimentações no volume das ordens de compra causa movimentação no preço do mercado.

Para iniciar a implementação do HMM primeiro foram produzidas amostras e analisado o comportamento de um HMM já existente criado pelo departamento de elétrica e engenharia da computação da Universidade de Boston para o artigo “Previsão de ações usando Modelos Ocultos de Markov” (JAIN; METHA; TEJA, 2018).

O HMM usado nesse estudo está disponível no GitHub, assim foi utilizado como base para a implementação.

O HMM de Jain, Metha e Teja, (2018) trabalha com um vetor de quatro elementos do preço diário – fechamento, abertura, alta e baixa – onde as observações são distribuição gaussianas multivariadas e os estados assumem valores discretos. O número de estados é selecionado utilizando o conceito de BIC (Critério de Informação Bayesiano). O BIC pressupõe a existência de um modelo que descreve a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias entre os diversos modelos sob seleção. Desse modo, o critério tende a ser maximizado para obter a verossimilhança ótima, da seguinte forma (SCHWARTZ, 1978):

$$BIC = -2 \log \cdot f(x_n | \theta) + p \cdot \log n \quad (12)$$

Em que, $f(x_n | \theta)$ é o modelo escolhido; p é o número de parâmetros a serem estimados; e n é o número de observações da amostra.

Na simulação, foram consideradas e implementadas o próprio VWAP e suas variações denominadas hipóteses variáveis para capturar o comportamento da tendência de retorno e da elasticidade dinâmica do preço. Consideramos duas hipóteses de variáveis. Na primeira hipótese variável (Eq. 13), conhecida como taxas de retorno logarítmico normalizadas (PAN, 2019), o preço VWAP futuro ($S_{p,d}$) do produto (p_n) é determinado pelo preço VWAP anterior ($S_{p,d-1}$).

$$\hat{r}_{p_n,d} = \ln \left(\frac{S_{p_n,d}}{S_{p_n,d-1}} \right) \quad (13)$$

De forma análoga a elasticidade econômica clássica, poder-se-ia utilizar a elasticidade dinâmica do preço como uma taxa de retorno (Eq. 14).

$$\hat{r}_{p_n,d} = \Delta \% S_{p_n,d} = \frac{S_{p_n,d} - S_{p_n,d-1}}{S_{p_n,d-1}} \quad (14)$$

A segunda hipótese de variável (Eq. 15) modela as taxas de retorno logarítmico normalizadas por vencimento total (PAN, 2019), em que H é o período de vencimento total do produto vinculado aos preços VWAP ($S_{p,d}$).

$$\hat{r}_{p_n,d} = \ln \left(\frac{S_{p_n,d}}{H} \right) \quad (15)$$

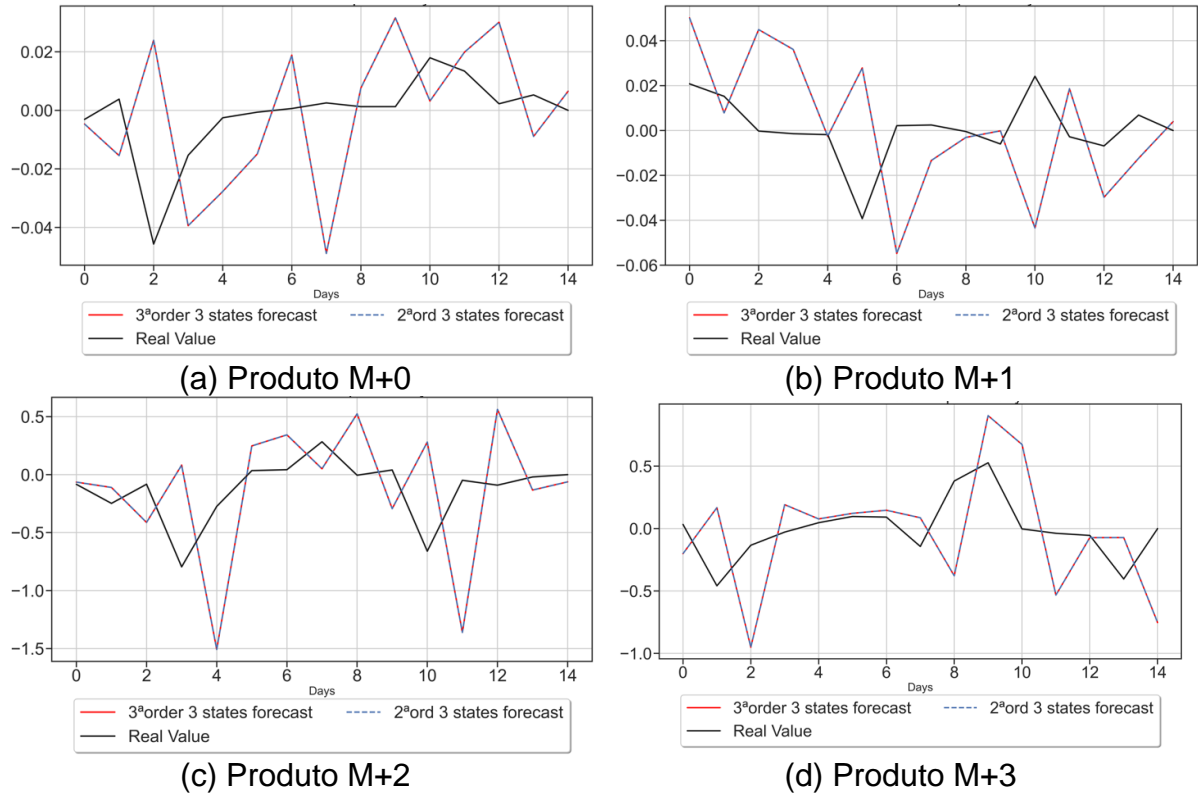
Entretanto o produto eletricidade possui “vida curta”, termina na sua entrega. Desse modo, para que o treinamento possua uma série de informações suficientemente longa para o treinamento do modelo foi implementado o *roll-off* dos dados dos produtos com base no próprio VWAP e nas variações apresentadas na Eq. (14) e na Eq. (15). O *roll-off* de produtos, considerando a base de informações de negociações de 2015 a 2023 é efetuado com base no ponto de referência, juntamente com o tempo, do agente de mercado com relação ao produto ($M+i$) negociado. Para capturar o comportamento de negociação dos agentes de mercado para um produto ($p_{n=1}$) na iminência da entrega ($M+0$), por exemplo, em $t_{n=1}$ supondo que seja antes da liquidação, as séries históricas compreendem a variável observada VWAP para cada produto (p_n) em seu mês de entrega (t_n). Dessa forma, “ n ” passa a ser considerado a referência para a Teoria da Perspectiva Econômica. Em outras palavras, há uma série formada pelos preços VWAP em t_n para o produto p_n , em t_{n-1} para o produto p_{n-1} , em t_{n-2} para o produto p_{n-2} e em t_{n-3} para o produto p_{n-3} . Caso a intenção for capturar o comportamento de negociação dos agentes de mercado para um produto com um *lead time* de $M+1$, na referência t_n , o *roll-off* será para p_{n+1} , para t_n . Nesse sentido, as séries históricas compreendem a variável observada para cada produto no mesmo *lead time*, formando assim uma série composta de VWAP em t_{n-1} para o produto p_n , em t_{n-2} para o produto p_{n-1} , em t_{n-3} para o produto p_{n-2} e em t_{n-4} para o produto p_{n-3} . Da mesma forma, para prospectar o comportamento dos agentes de mercado para i *lead times* (ALBANI *et al.*, 2025; LIMA *et al.*, 2023; TAGHORI SICA *et al.*, 2025).

4.4 Resultados e discussão

Para a previsão foram considerados os períodos de 15, 30 e 100 das últimas amostras de cada série histórica e o treinamento do modelo com os dados restantes, começando do primeiro registro até o centésimo em ordem inversa, seguindo o mesmo método de treinamento de Darbha e Kuinchtner (Darbha, 2018; Kuinchtner, 2020). Os resultados do modelo HOHMM implementado são apresentados para os produtos M+0, M+1, M+2 e M+3 em cada hipótese, sendo a hipótese 1 segundo a Eq.

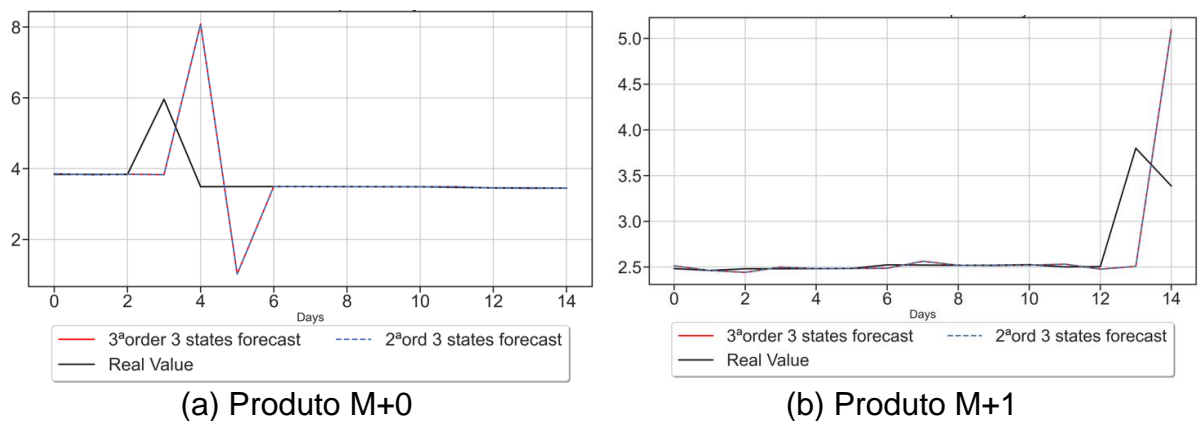
(13), a hipótese 2 segundo a Eq. 15 e o VWAP segundo a Eq. 11, para as previsões de 15 dias (Figuras 29, 30 e 31, respectivamente); de 30 dias (Figuras 32, 33 e 34, respectivamente); e de 100 dias (Figuras 35, 36 e 37, respectivamente).

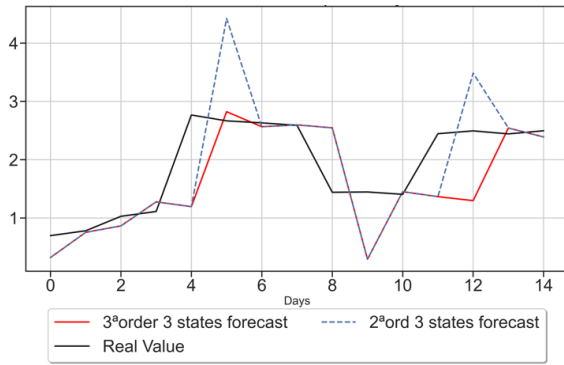
Figura 29 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias pela hip. 01 (Eq. 13)



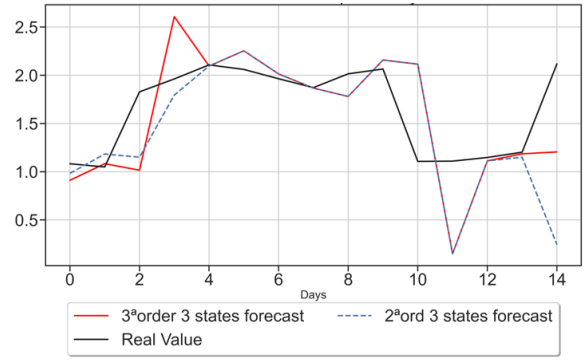
Fonte: Autora, 2025.

Figura 30 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias pela hip. 02 (Eq. 15)





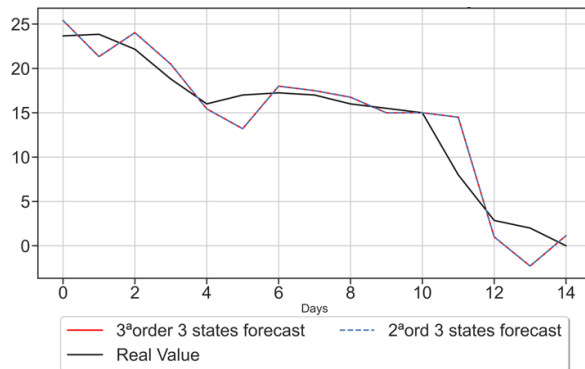
(c) Produto M+2



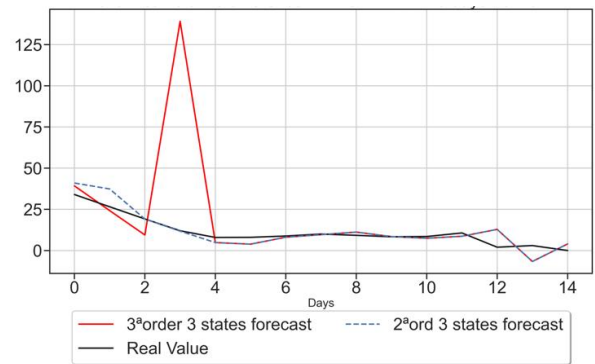
(d) Produto M+3

Fonte: Autora, 2025.

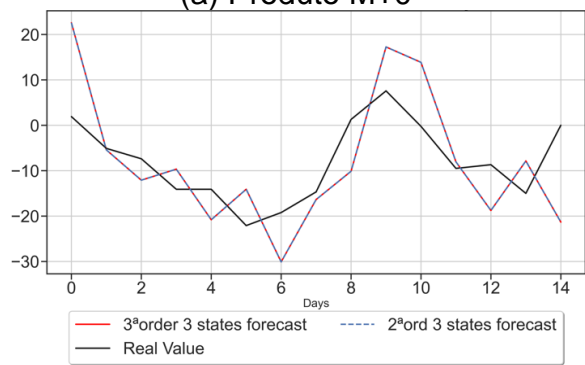
Figura 31 - Série de dados sintéticos para previsão de 15 dias por VWAP (Eq. 11)



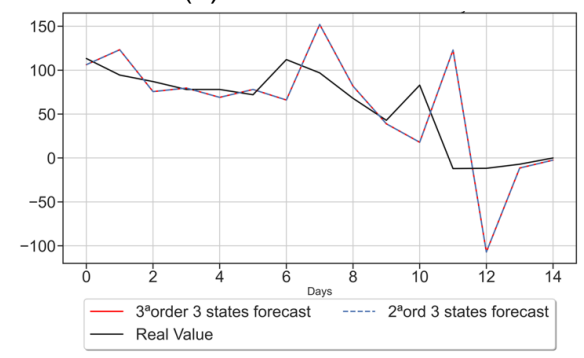
(a) Produto M+0



(b) Produto M+1



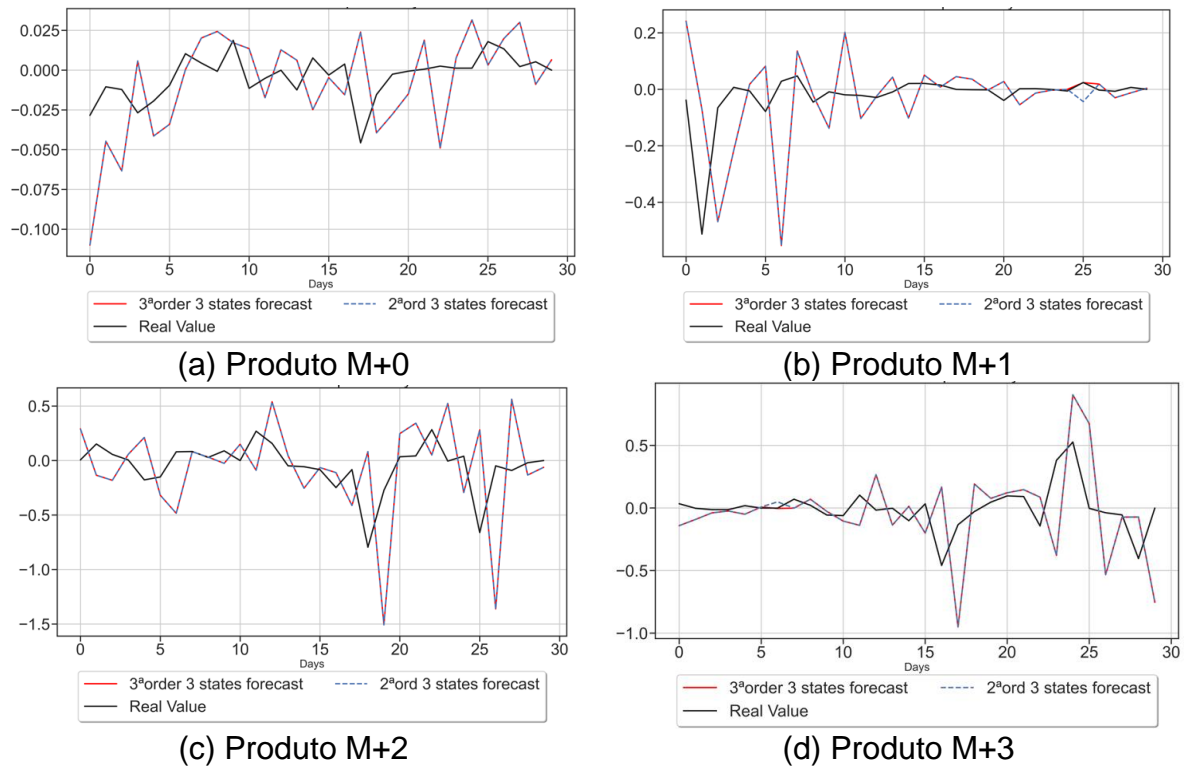
(c) Produto M+2



(d) Produto M+3

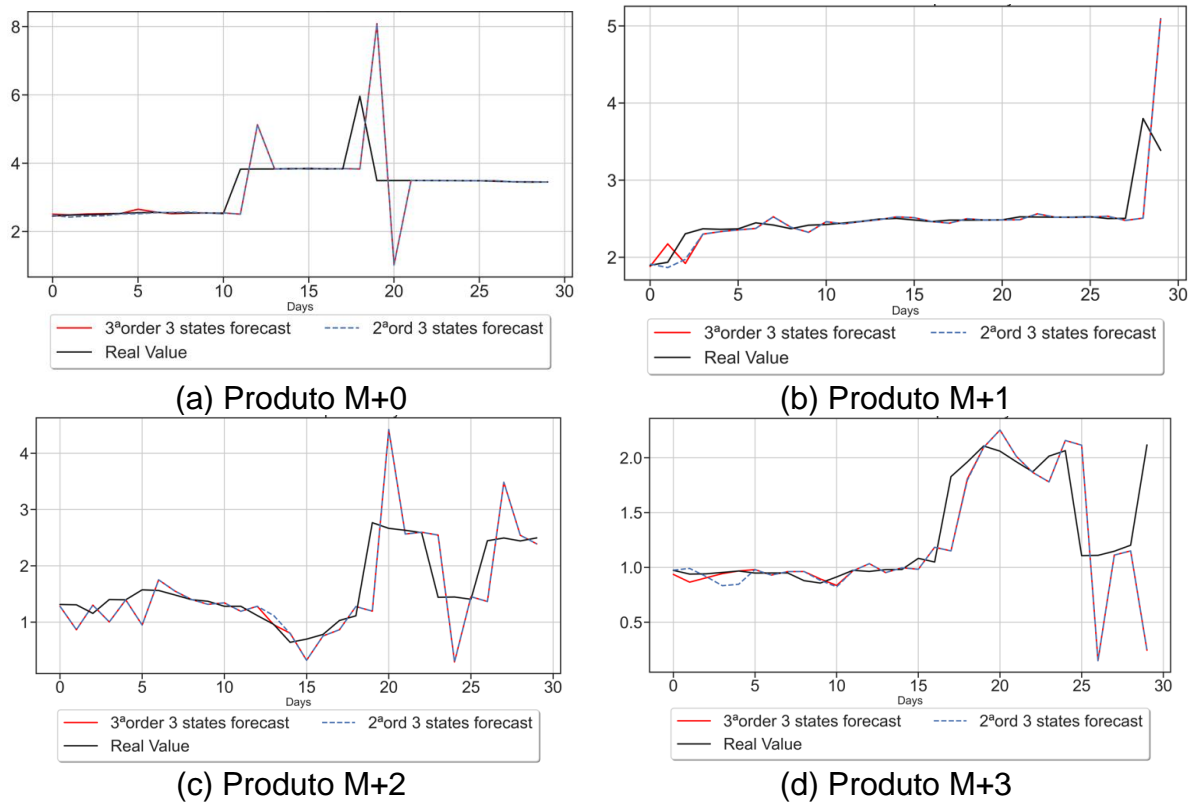
Fonte: Autora, 2025.

Figura 32 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias pela hip. 01 (Eq. 13)



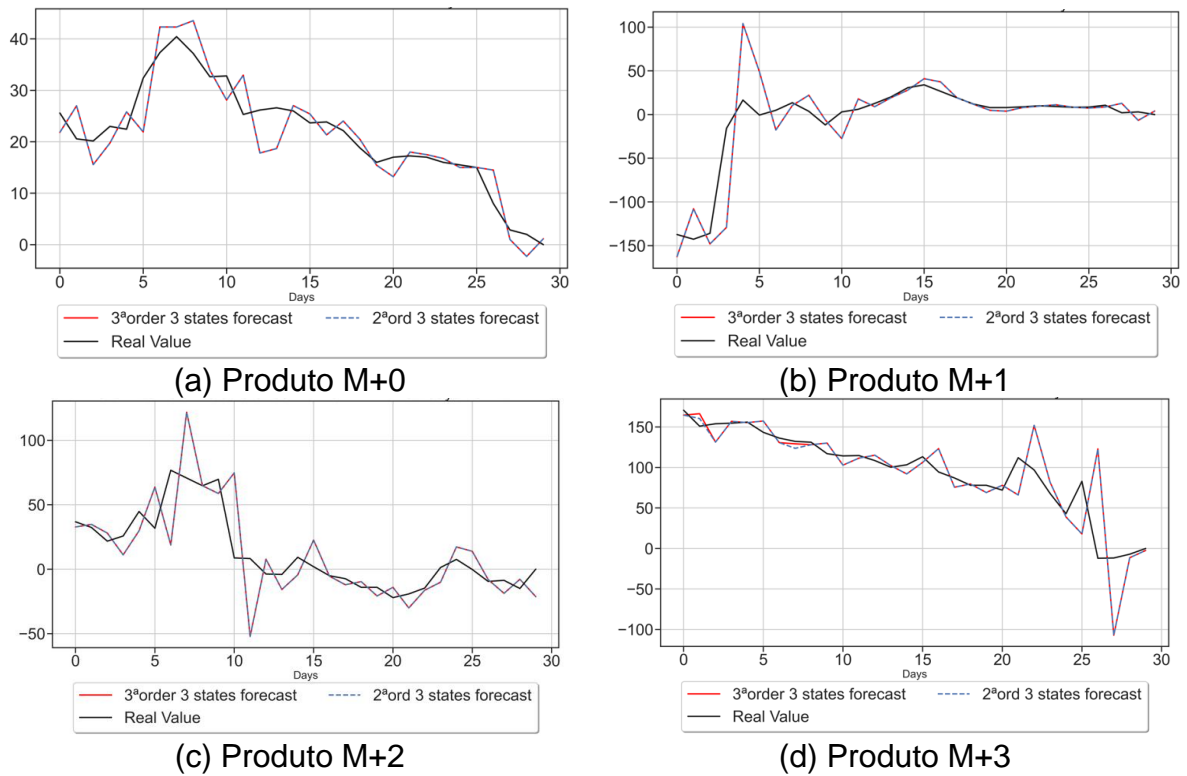
Fonte: Autora, 2025.

Figura 33 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias pela hip. 02 (Eq. 15)



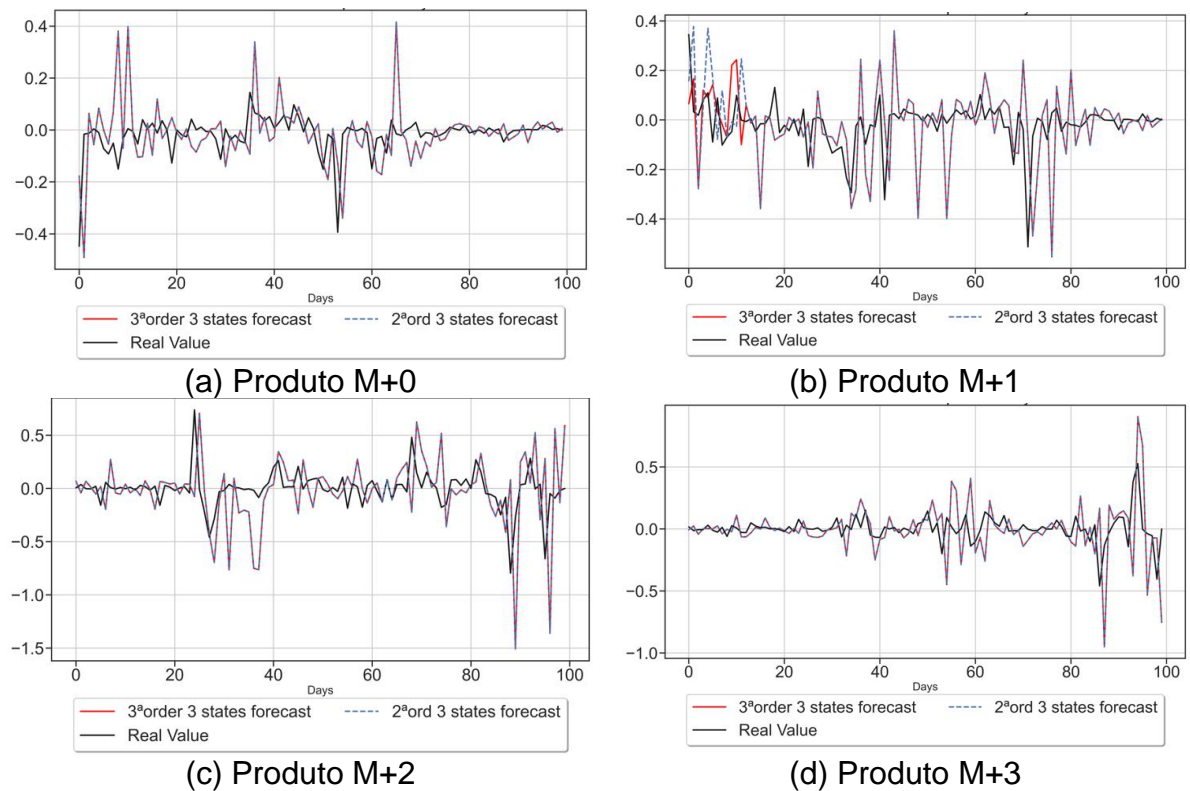
Fonte: Autora, 2025.

Figura 34 - Série de dados sintéticos para previsão de 30 dias por VWAP (Eq. 11)



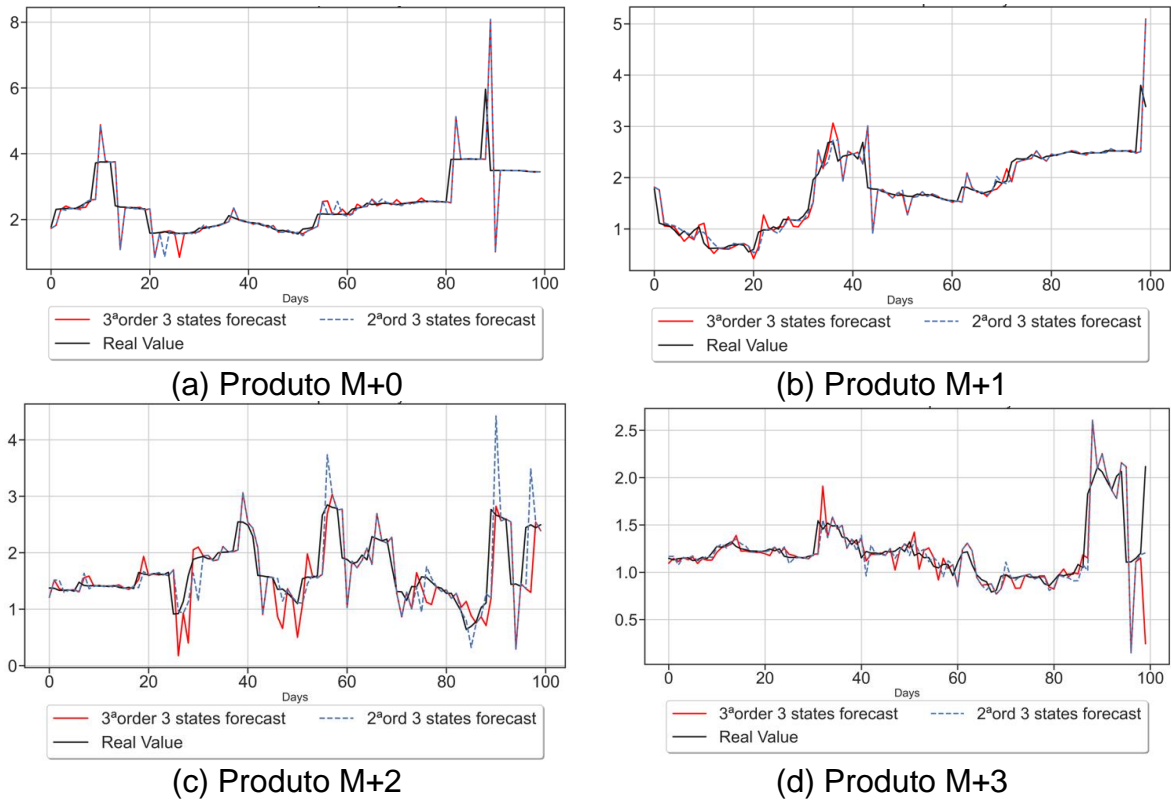
Fonte: Autora, 2025.

Figura 35 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias pela hip. 01 (Eq. 13)



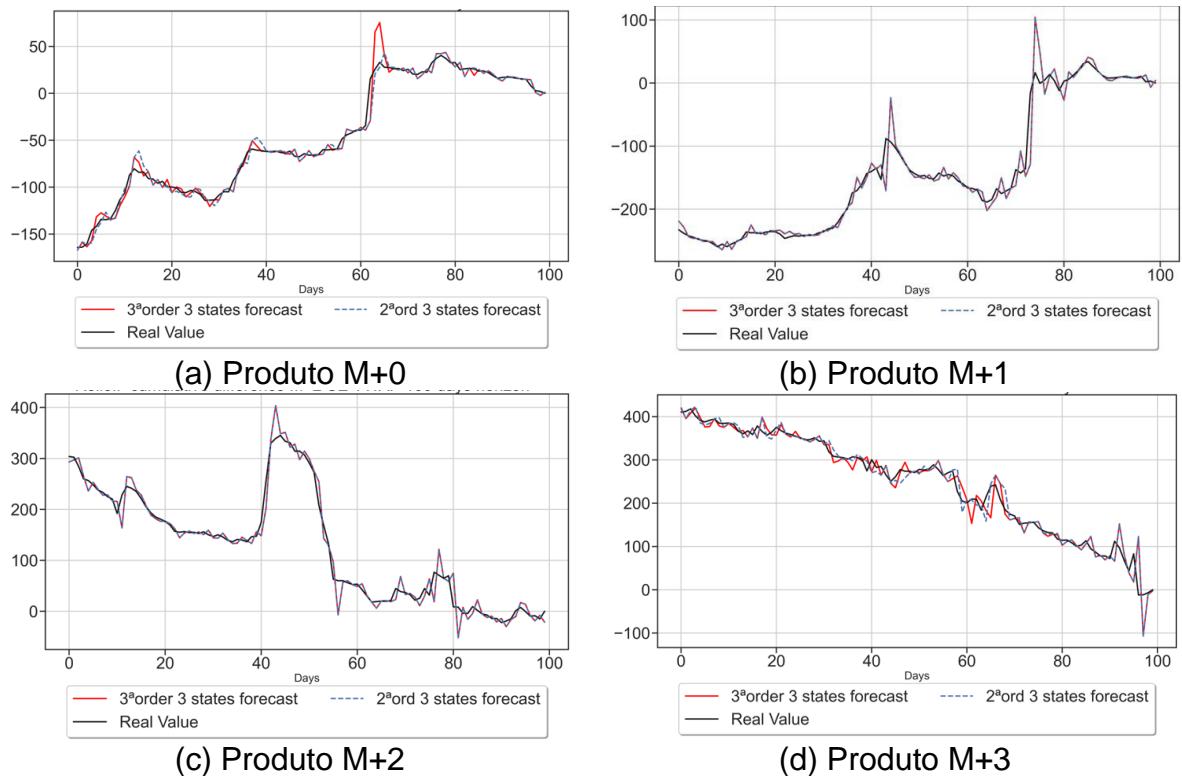
Fonte: Autora, 2025.

Figura 36 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias pela hip. 02 (Eq. 15)



Fonte: Autora, 2025.

Figura 37 - Série de dados sintéticos para previsão de 100 dias por VWAP (Eq. 11)



Fonte: Autora, 2025.

O modelo HOHMM proposto foi simulado para gerar séries de dados sintéticos e auxiliar o tomador de decisões de três maneiras diferentes para cada produto ($M+0$, $M+1$, $M+2$ e $M+3$): hipótese 01 pela Eq. 13; hipótese 02 pela Eq. 15; e pelo VWAP. As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam todos os resultados simulados e todos os números de cada simulação. Os resultados mostram uma precisão adequada para identificar a tendência de preço. No entanto, os modelos HOHMM não capturam bem os picos e vales dos valores, e talvez uma matemática adicional para capturar melhor essa tendência possa ser uma boa opção.

Comparando os produtos, observa-se os melhores resultados em $M+0$. Entretanto, $M+0$ pode ser menos interessante para as empresas de comercialização de energia no sistema brasileiro em comparação com produtos como $M+2$ e $M+3$. Pode-se verificar que suas métricas não são desprezíveis ao simular esses produtos. Comparando as hipóteses variáveis, a hipótese normalizada das taxas de retorno logarítmico pelo vencimento total (hipótese 2) produz melhores valores para RMSE, MAPE e MSE, mostrando melhor pontuação de precisão das previsões. Entretanto, ao comparar os modelos apresentados aqui com exemplos de dados das bolsas de valores dos EUA (R. T. DARBHA; A. JAIN; P. MEHTA, 2018), a métrica MAPE os penaliza significativamente em quase todos os casos simulados, com erros próximos de zero. O MAPE não avalia se o método incorporou características estatísticas da série temporal. O MAPE, de acordo com Everitt e Strondal, (2010), “é a média de todos os erros absolutos percentuais, fornecendo uma indicação do tamanho médio do erro, expresso como uma porcentagem do valor observado, independentemente de o erro ser positivo ou negativo”.

A Figura 36 revela uma perspectiva interessante. Ela apresenta resultados superestimados, enquanto a reversão à média é aceitável. Os últimos valores são mais uniformes, com menos volatilidade e não apresentam picos e vales bem definidos, conforme mostrado na comparação dos dados das ações dos EUA (JAIN; METHA; TEJA, 2018) e das ações brasileiras (KUINCHTNER; AFONSO MADALOZZO, 2018).

O modelo utilizou uma aproximação de primeira ordem dos modelos de Markov, e esse é outro ponto a ser considerado. Um HMM de primeira ordem combinado com técnicas matemáticas específicas para capturar picos e vales bem

definidos poderia ser menos intensivo em termos de computação e produzir resultados mais próximos da realidade. A exploração de modelos adicionais como *Ornstein-Uhlenbeck* para auxiliar na reversão à média e modelos de salto de Poisson para melhor previsão e definição de picos e vales também poderia aumentar a precisão das previsões (XIONG; MAMON, 2019).

Um valor negativo de MBE (*Mean Bias Error*) mostra que as previsões do modelo subestimam os valores reais. O modelo está, em média, prevendo valores menores do que os valores reais. Com um MBE positivo, o modelo está, em média, prevendo valores maiores do que os valores reais. As tabelas mostram que os dados de previsão para o horizonte de 30 e 15 dias apresentam, em sua maioria, valores de MBE positivos, e a previsão para 100 dias mostra uma previsão com valores inferiores aos reais.

Tabela 2 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 15 dias.

DADOS - 15 dias de antecedência	HOHMM de 3ª ordem					HOHMM de 2ª ordem				
	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE
Produto M+0 hip 01 (Eq. 13)	0.0000	nf	0.0281	0.1677	0.0220	0.000	nf	0.0281	0.1677	0.022
Produto M+0 hip 02 (Eq. 15)	0.0012	0.1602	4.550	2.062	0.6184	0.0012	0.1602	4.550	2.062	0.6184
Produto M+1 hip 01 (Eq. 13)	0.0012	nf	0.0350	0.1741	0.0269	0.0012	nf	0.0350	0.1870	0.0269
Produto M+1 hip 02 (Eq. 15)	0.0281	0.0625	0.5532	0.7438	0.2155	0.0281	0.0625	0.5532	0.7438	0.2155
Produto M+2 hip 01 (Eq. 13)	0.0036	nf	0.6352	0.7970	0.4859	0.0340	nf	0.6547	0.8091	0.5318
Produto M+2 hip 02 (Eq. 15)	0.0249	0.3105	0.8360	0.8520	0.5812	0.0249	0.3105	0.8360	0.9143	0.5812
Produto M+3 hip 01 (Eq. 13)	0.0336	nf	0.4704	0.6859	0.3766	0.0336	nf	0.4704	0.6859	0.3766
Produto M+3 hip 02 (Eq. 15)	0.1218	0.2630	0.6562	0.8101	0.4050	0.1759	0.2467	0.6361	0.7976	0.3731
Produto M+0 VWAP (Eq. 11)	0.0935	nf	5.482	9.173	8.968	0.0935	nf	5.482	5.963	8.968
Produto M+1 VWAP (Eq. 11)	0.8910	nf	3.440	3.117	7.347	0.8910	nf	3.440	3.117	7.347
Produto M+2 VWAP (Eq. 11)	0.1111	nf	7.427	2.776	8.392	0.1111	nf	7.427	2.776	8.392
Produto M+3 VWAP (Eq. 11)	0.2733	nf	3.693	0.971	23.311	0.2733	nf	3.693	0.971	23.311

Fonte: Autora (2025).

Tabela 3 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 30 dias.

DADOS - 30 dias à frente	HOHMM de 3ª ordem					HOHMM de 2ª ordem				
	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE
Produto M+0 hip 01 (Eq. 13)	0.0095	nf	0.0357	0.1890	0.0273	0.0046	nf	0.0304	0.1744	0.0243
Produto M+0 hip 02 (Eq. 15)	0.0002	.1054	0.828	0.406	0.4028	0.0027	0.1063	0.828	0.406	0.4052
Produto M+1 hip 01 (Eq. 13)	0.0151	nf	0.1821	0.4267	0.1121	0.0151	nf	0.1821	0.4267	0.1121

Produto M+1 hip 02 (Eq. 15)	0.0026	0.0441	0.3974	0.6304	0.1376	0.0048	0.0478	0.4012	0.6334	0.1450
Produto M+2 hip 01 (Eq. 13)	0.0173	nf	0.4875	0.6982	0.3524	0.0173	nf	0.4875	0.6982	0.3524
Produto M+2 hip 02 (Eq. 15)	0.1668	0.2288	0.5484	0.7405	0.3536	0.0410	0.2187	0.6154	0.7845	0.3720
Produto M+3 hip 01 (Eq. 13)	0.0276	nf	0.3438	0.5863	0.2347	0.0276	nf	0.3438	0.5863	0.2347
Produto M+3 hip 02 (Eq. 15)	0.0661	0.1534	0.4658	0.6825	0.2229	0.0918	0.1482	0.4519	0.6722	0.2098
Produto M+0 VWAP (Eq. 11)	0.2897	nf	4.333	1.055	4.800	0.0113	nf	1.917	0.474	2.305
Produto M+1 VWAP (Eq. 11)	0.1059	nf	97.420	4.536	58.502	0.2408	nf	1.985	4.953	59.429
Produto M+2 VWAP (Eq. 11)	0.7000	nf	43.672	9.363	63.400	0.7000	nf	43.672	9.363	63.400
Produto M+3 VWAP (Eq. 11)	0.5751	nf	63.218	0.268	01.702	0.5751	nf	63.218	0.268	1.702

Fonte: Autora (2025).

Tabela 4 - Comparações entre os modelos para uma projeção de 100 dias.

DATA - 100 dias à frente	HOHMM de 3ª ordem					HOHMM de 2ª ordem				
	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE	MBE	MAPE	MSE	RMSE	MAE
Produto M+0 hip 01 (Eq. 5)	0.0040	inf	0.1299	0.3604	0.0810	0.0040	nf	0.1299	0.3604	0.0810
Produto M+0 hip 02 (Eq. 7)	0.0105	0.0853	0.6616	0.8134	0.2396	0.0085	0.0840	0.6605	0.8127	0.2379
Produto M+1 hip 01 (Eq. 5)	0.0063	inf	0.1623	0.4029	0.1121	0.0063	nf	0.1623	0.4029	0.1121
Produto M+1 hip 02 (Eq. 7)	0.0030	0.0890	0.3088	0.5557	0.1489	0.0119	0.1278	0.3408	0.5838	0.1783
Produto M+2 hip 01 (Eq. 5)	0.0142	inf	0.3508	0.5922	0.2288	0.0142	nf	0.3508	0.5922	0.2288
Produto M+2 hip 02 (Eq. 7)	0.0398	0.1515	0.4065	0.6376	0.2475	0.0791	0.1665	0.4259	0.6526	0.2619
Produto M+3 hip 01 (Eq. 5)	0.0083	nf	0.2279	0.4774	0.1382	0.0072	nf	0.2280	0.4775	0.1386
Produto M+3 hip 02 (Eq. 7)	0.0215	0.0885	0.2708	0.5204	0.1180	0.0215	0.0885	0.2708	0.5204	0.1180
Produto M+0 VWAP (Eq. 11)	0.3964	nf	2.3880	6.905	7.294	0.2751	nf	3.450	8.888	0.399
Produto M+1 VWAP (Eq. 11)	0.4860	nf	8.866	5.702	03.815	0.4860	nf	8.866	5.702	3.815
Produto M+2 VWAP (Eq. 11)	0.1453	nf	10.403	5.870	32.755	31.508	nf	71.622	2.117	58.482
Produto M+3 VWAP (Eq. 11)	0.1117	nf	48.308	9.831	51.409	11.480	nf	61.341	1.122	58.529

Fonte: Autora (2025).

O MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*, erro percentual absoluto médio) é calculado como a média das porcentagens absolutas de erro entre as previsões do modelo e os valores reais. Um MAPE infinito pode ocorrer em situações em que os valores reais são minúsculos ou zero. Isso acontece porque a fórmula do MAPE envolve a divisão por valores reais e, quando os valores reais estão próximos de zero, a divisão por esses valores resulta em um valor muito grande, próximo do infinito. Um MAPE infinito mostra que o modelo não consegue prever corretamente os valores quando eles são pequenos ou zero, o que aconteceu na maioria dos três horizontes

de previsão mostrados. Entretanto, não é a melhor métrica a ser usada para essa avaliação de modelo.

O MSE (*Mean Squared Error* - erro quadrático médio) é uma métrica comumente usada para avaliar a precisão de um modelo de previsão ou regressão. O MSE calcula a média dos quadrados dos erros entre as previsões do modelo e os valores reais. O MSE é uma medida importante porque penaliza mais os erros maiores, pois os erros são elevados ao quadrado. Portanto, valores mais altos de MSE mostram uma maior dispersão de erros em torno das previsões do modelo, o que sugere um desempenho inferior do modelo em relação aos dados de treinamento. Quanto menor o MSE, mais preciso pode ser o modelo.

O RMSE (*Root Mean Squared Error*) é a raiz quadrada do MSE, que fornece uma medida do desvio padrão dos resíduos, os erros do modelo. Ele expressa esse desvio na mesma unidade que os dados, o que o torna mais interpretável do que o MSE. Quanto mais baixo for o valor de RMSE, melhor será o desempenho do modelo em termos de precisão da previsão.

O MAE (*Mean Absolute Error* - erro absoluto médio) mede a magnitude média dos erros entre as previsões de um modelo e os valores reais. Quanto mais baixo for o valor do MAE, melhor será o desempenho do modelo em termos de precisão da previsão; no entanto, o MAE não penaliza os grandes erros de previsão de forma tão acentuada quanto o MSE, mas, da mesma forma, os dados usados com diferença cumulativa apresentam menor precisão.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos modelos financeiros projetados para *commodities* não podem ser adaptados devido às idiosincrasias da estrutura do mercado de eletricidade. Conclui-se que a modelagem analítica do comportamento do preço da energia é muito mais complexa que o de outras *commodities*. Usualmente, tem-se a característica não-Gaussiana gerada por saltos e/ou *spikes* e/ou volatilidade estocástica, deste modo, ao usufruir de dados históricos dos preços como variáveis observáveis, existe a necessidade de processamento para estimação dos preços à vista.

No escopo de curto prazo, cerca de 15 dias, a precipitação prevista pode influenciar os movimentos de preço e o comportamento dos agentes de mercado, entretanto isto não é imperativo. O fenômeno da precipitação tem relação natural com o recurso primário para produção de energia hidrelétrica, mas o impacto disto no preço, provavelmente, deve ser avaliado de forma dinâmica e sistêmica com outros fenômenos como a Perspectiva Econômica e agressões de agentes de mercado, o volume ou as anomalias meteorológicas.

A geração de séries sintéticas pelo modelo HOHMM implementado obteve melhores resultados para produtos M+2 e M+3, sobretudo em horizontes mais distantes. Ou seja, pelas métricas, considerando uma média geral, os resultados para 100 dias foram melhores que os de 30 dias, que por sua vez são melhores que os de 15 dias de previsão.

No escopo de médio prazo, a ENA se configura como uma variável imprescindível para analisar os movimentos de preço. Contudo, as vazões naturais afluentes aos reservatórios e às sub-bacias possuem forte dependência do binômio solo-água e da gestão e dos usos múltiplos dos recursos hídricos, caracterizando-se, portanto, com uma complexidade não-trivial.

Os trabalhos analisados mostram uma gama de possibilidades a serem consideradas e possivelmente mais exploradas com o intuito da aplicação de um modelo específico aplicado às necessidades do mercado de energia elétrica brasileiro, a fim de produzir uma recomendação inteligente para tomada de decisão e mitigação de riscos encontrados no dia a dia do processo de trading de energia. Este trabalho

indica aspectos sobre HMMs que podem ser modificados, melhorados, ou até fundidos a outras técnicas que possam gerar trabalhos acadêmicos sobre o assunto.

REFERÊNCIAS

- AIUBE, F. A. L. **Modelos Quantitativos em Finanças: Com Enfoque em Commodities**. [s.l.] Bookman, 2013. 1–472 p.
- ALBANI, V. V. L.; MARCAVILLACA, R. T.; MOREIRA, P. S. E.; AVILA, S. L.; GEREMIA, M.; PIOVEZAN, R. P. B.; SICA, E. T.; SANTOS, E. Short-term forecasting of forward prices in the Brazilian electricity market with a hybrid stochastic-neural network model. **Energy Economics**, v. 148, p. 108651, ago. 2025.
- ANTONIO, M.; TICONA, J. **MODELO DA ESTRATÉGIA INNER CIRCLE TRADE USANDO INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL**. 2023. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA, Pampa, 2023. . Acesso em: 3 dez. 2025.
- APERGIS, N.; GOZGOR, G.; LAU, C. K. M.; WANG, S. Decoding the Australian electricity market: New evidence from three-regime hidden semi-Markov model. **Energy Economics**, v. 78, p. 129–142, 1 fev. 2019. . Acesso em: 3 dez. 2025.
- ARAUJO, F. **Estimando a Curva Forward de Energia Elétrica no Brasil com um Modelo de Dois Agentes Utilizando Contratos por Diferença e Função ECP_G**. 2020. PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2020. . Acesso em: 6 jun. 2024.
- ARISMENDI, J. C.; BACK, J.; PROKOPCZUK, M.; PASCHKE, R.; RUDOLF, M. Seasonal Stochastic Volatility: Implications for the pricing of commodity options. **Journal of Banking and Finance**, v. 66, p. 53–65, 1 maio 2016. . Acesso em: 2 dez. 2025.
- BARBOSA, M.; DA, B.; CAMPBELL, S.; WANDERLEY, J.; LIMA, M. **UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA PROGRAMAÇÃO DIÁRIA ENERGÉTICA COM O USO DO DESSEM E O ACOPLAMENTO COM A REALIDADE OPERATIVA** Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Elétrica como 2022. 2022. . Acesso em: 2 dez. 2025.
- BBCE. **METODOLOGIA BBCE Curva Foward**. [s.l: s.n.]. . Acesso em: 3 dez. 2025.
- BIAŁKOWSKI, J.; DAROLLES, S.; LE FOL, G. **Decomposing Volume for VWAP Strategies**. 2005. INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES , Paris, 2005. . Acesso em: 3 dez. 2025.
- BILMES, J. A. A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models. 1998. . Acesso em: 3 dez. 2025.
- BJERKSUND, P.; RASMUSSEN, H.; STENSLAND, G. Valuation and Risk Management in the Norwegian Electricity Market. p. 167–185, 2010. . Acesso em: 2 dez. 2025.
- BLACK, F. The pricing of commodity contracts. **Journal of Financial Economics**, v. 3, n. 1–2, p. 167–179, 1976. . Acesso em: 2 dez. 2025.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The effects of dividend yield and dividend policy on common stock prices and returns. **Journal of Financial Economics**, v. 1, n. 1, p. 1–22, 1 maio 1974.

Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304405X74900063>>. Acesso em: 2 dez. 2025.

BOTCHKAREV, A. A New Typology Design of Performance Metrics to Measure Errors in Machine Learning Regression Algorithms. **Interdisciplinary Journal of Information, Knowledge, and Management**, v. 14, p. 045–076, 24 jan. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.28945/4184>>. Acesso em: 5 ago. 2024.

BRONDANI, G.; CANHA, L. Análise Crítica da Abertura do Mercado Livre de Energia Elétrica Brasileiro para Clientes de Baixa Tensão. [s.d.] Disponível em: <https://www.sba.org.br/open_journal_systems/index.php/sbse/article/view/3020/2550>. Acesso em: 26 jun. 2024.

CAIXETA, R. **Simulação geoestatística utilizando múltiplos passeios aleatórios**. 2015. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/296621411_Simulacao_geoestatistica_utilizando_multiplos_passeios_aleatorios/figures?lo=1>. Acesso em: 4 dez. 2025.

CCEE. Proposta conceitual para a abertura do mercado. 2022.

CEPEL. **Modelo DECOMP DETERMINAÇÃO DA COORDENAÇÃO DA OPERAÇÃO A CURTO PRAZO MANUAL DO USUÁRIO**. [s.l: s.n.]. . Acesso em: 2 dez. 2025.

CEPEL. **PROJETO NEWAVE MODELO DE PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS INTERLIGADOS DE LONGO E MÉDIO PRAZOS MANUAL DO USUÁRIO**. [s.l: s.n.]. . Acesso em: 2 dez. 2025.

CEPEL. **Manual do Usuário – Modelo DESSEM v.21** . [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://www.cepel.br/wp-content/uploads/2025/05/DESSEM_ManualUsuario_v21.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2025.

EVERITT; STRONDAL. **The Cambridge Dictionary of Statistics 4th Edition | Cambridge University Press & Assessment**. 4. ed. UK: Cambridge, 2010. v. 1

FAUCHEUX, Sylvie.; NOËL, J. F. **Economia dos recursos naturais e do meio ambiente**. 1. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

FELIZATTI, H. L.; HANSEN, P. M.; HOTTA, L. K.; HERENCIA, M. E. Z. . Curva Forward no Mercado de Energia Elétrica Brasileiro: Construção, Modelagem, Previsão e Simulação . p. 1–34, 2019. . Acesso em: 26 jun. 2024.

GAVRIKOV, M. M.; MEZENTSEVA, A. Y.; SINETSKY, R. M. Heuristic Techniques for Constructing Hidden Markov Models of Stochastic Processes. Em: Proceedings - 2023 International Russian Smart Industry Conference, SmartIndustryCon 2023, 2023, [...]. 2023.

GONZÁLEZ, A. M.; SAN ROQUE, A. M.; GARCÍA-GONZÁLEZ, J. Modeling and forecasting electricity prices with input/output hidden Markov models. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 20, n. 1, p. 13–24, fev. 2005. . Acesso em: 30 mar. 2025.

GUAZZELLI, M. R. Teoria e prática sobre as Cadeias de Markov. **Revista Ambiente**, v. 7, n. 1, p. 45–51, 1 jan. 1993. Disponível em: <<https://revista.cetesb.sp.gov.br/revista/article/view/146>>. Acesso em: 27 jun. 2024.

GUDKOV, N.; IGNATIEVA, K. Electricity price modelling with stochastic volatility and jumps: An empirical investigation. **Energy Economics**, v. 98, 1 jun. 2021. . Acesso em: 2 dez. 2025.

HALILČEVIC, S. S.; GUBINA, A. F. The short term electricity prices forecasting using Markov chains. **2011 8th International Conference on the European Energy Market, EEM 11**, p. 198–203, 2011. . Acesso em: 3 dez. 2025.

HALKOS, G. E.; TSIRIVIS, A. S. Effective energy commodity risk management: Econometric modeling of price volatility. **Economic Analysis and Policy**, v. 63, p. 234–250, 1 set. 2019. . Acesso em: 2 dez. 2025.

HAMBLY, B.; HOWISON, S.; KLUGE, T. Modelling spikes and pricing swing options in electricity markets. 2007. . Acesso em: 2 dez. 2025.

HARRIS, C. Electricity Markets: Pricing, Structures and Economics (The Wiley Finance Series). p. 542, 2006. Disponível em: <<http://www.amazon.com/Electricity-Markets-Pricing-Structures-Economics/dp/0470011580>>. Acesso em: 2 dez. 2025.

JAIN, A.; METHA, P.; TEJA, R. **Stock Forecasting Using Hidden Markov Models: Ayushj94@bu - Edu Pmehta59@bu - Edu | PDF | Markov Chain | Akaike Information Criterion**. 2018. Boston University, 2018. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/349975721/Final-Report>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

KEGNENLEZOM, M.; TAKAM SOH, P.; MBELE BIDIMA, M. L. D.; EMVUDU WONON, Y. A jump-diffusion model for pricing electricity under price-cap regulation. **Mathematical Sciences**, v. 13, n. 4 (December 2019), p. 395–405, 19 out. 2019. Disponível em: <<https://oicpress.com/ms/article/view/9659/10900>>. Acesso em: 2 dez. 2025.

KHODJA, N. K.; DUCULTY, F.; BEGOT, S.; AVILA, M. Non-behavior Viterbi training, a new strategy for training Hidden Markov Models. **Pattern Recognition Letters**, 2023.

KUINCHTNER, D.; AFONSO MADALOZZO, G. **Predição do Mercado de Ações Usando Hidden Markov Model**. [s.l: s.n.].

LES CLEWLOW; C. STRICKLAND. Energy Derivatives: Pricing and Risk Management | Request PDF. jan. 2000. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/243785890_Energy_Derivatives_Pricing_and_Risk_Management>. Acesso em: 2 dez. 2025.

LIMA, K. V. P.; SICA, E. T.; BENEDET, J. V. R.; ALBANI, V. V. L.; AVILA, S. L.; RAMOS, F. G.; CALOGERAS, H.; SANTOS, E. F. Contribuição à previsão de tendência de preço de energia elétrica utilizando modelo HOHMM. Em: XXVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, 2023, Brasília. [...]. Brasília: Clgré Brasil, 2023.

LINDEN, R. Técnicas de Agrupamento. **Revista de Sistemas de Informação da FSMA**, p. 18–36, 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/267710538_Tecnicas_de_Agrupamento>. Acesso em: 3 dez. 2025.

LUCIA, J. J.; SCHWARTZ, E. S. Electricity prices and power derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. **Review of Derivatives Research**, v. 5, n. 1, p. 5–50, 2002. . Acesso em: 2 dez. 2025.

LUNA, A. H. **Introdução aos Métodos de Monte Carlo Avançados**. [s.l.: s.n.]1–105 p.

LUZ, C. P. de M. S.; GOMES, L. L.; BRANDÃO, L. E. T. Análise da Dinâmica do Mercado a Termo de Energia Elétrica no Brasil. **Revista Brasileira de Gestão de Negócios**, v. 14, n. 44, p. 314–334, 2012. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbgn/a/cw5DkDBZsxrHNq73xjyBNhN/?lang=pt>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

MACLEOD, N. Artificial Intelligence in the Earth Sciences. **Encyclopedia of Earth Sciences Series**, v. 2020, p. 1–13, 2020. Disponível em: <https://link.springer.com/rwe/10.1007/978-3-030-26050-7_1-1>. Acesso em: 3 dez. 2025.

MAIA, A. G. **Econometria: Conceitos e Aplicações - Alexandre Gori Maia - Google Livros**. [s.l.] Saint Paul Editora, 2019. 1–384 p.

MANERA, M.; NICOLINI, M.; VIGNATI, I. Modelling futures price volatility in energy markets: Is there a role for financial speculation? **Energy Economics**, v. 53, p. 220–229, 1 jan. 2016. . Acesso em: 2 dez. 2025.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. de C. **Análise de séries temporais**. 2004. 2004. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/item/001389286>>. Acesso em: 2 dez. 2025.

OLIVEIRA, S.; GOMES, M.; FILHO, A. **Modelos estocásticos com heterocedasticidade para séries temporais em finanças USP-São Carlos Julho de 2005**. 2025. 2025. . Acesso em: 2 dez. 2025.

ORIGUELA, L. A. Estudo da influência de eventos sobre a estrutura do mercado brasileiro de ações a partir de redes ponderadas por correlações de Pearson, Spearman e Kendall. 6 ago. 2018. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/96/96132/tde-02102018-092930/>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

PAN, Z. A Review of Prospect Theory. **Journal of Human Resource and Sustainability Studies**, v. 07, n. 01, p. 98–107, 2019.

PILIPOVIĆ, Dragana. **Energy risk: valuing and managing energy derivatives**. [s.l.] McGraw-Hill, 1998. 248 p.

PUN, C. S.; CHUNG, S. F.; WONG, H. Y. Variance swap with mean reversion, multifactor stochastic volatility and jumps. **European Journal of Operational Research**, v. 245, n. 2, p. 571–580, 2015. . Acesso em: 2 dez. 2025.

R. T. DARBHA; A. JAIN; P. MEHTA. **Stock Forecasting using Hidden Markov Models**. [s.l.: s.n.].

RABINER, L. L.; JUANG, B.-H. B. Theory and Implementation of Hidden Markov Models. **Fundamentals of Speech Recognition**, v. 103, p. 321–389, 1993. Disponível em: <<http://cmp.felk.cvut.cz/cmp/support/phd112.html>>. Acesso em: 27 jun. 2024.

RABINER, L. R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. **Proceedings of the IEEE**, v. 77, n. 2, p. 257–286, 1989. . Acesso em: 27 jun. 2024.

RABINER, L. R.; JUANG, B. H. An Introduction to Hidden Markov Models. **IEEE ASSP Magazine**, v. 3, n. 1, p. 4–16, 1986. . Acesso em: 31 jul. 2024.

ROBERTO, C.; CARMO, S.; RAYSE, J.; SILVA, M. APRENDIZADO DE MÁQUINA E PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS DE ARMAZENAMENTO DE DADOS: MÉTRICAS PARA ANÁLISE E VALIDAÇÃO DE ALGORITMOS PREVISORES. **Revista GeTeC**, v. 12, n. 38, 28 mar. 2023. Disponível em: <<https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/getec/article/view/2895>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

ROFATTO, V. F.; MATSUOKA, M. T.; KLEIN, I. Precisão, Veracidade e Acurácia: Sobre Erros e Incertezas. **Revista Brasileira de Cartografia**, v. 77, p. 1–23, 24 fev. 2025. Disponível em: <<https://seer.ufu.br/index.php/revistabrasileiracartografia/article/view/74914>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

RONCORONI, A.; GEMAN, H. Understanding the fine structure of electricity prices. **Journal of Business**, v. 79, n. 3, p. 1225–1261, 2006. Disponível em: <<http://eprints.bbk.ac.uk/Geman,H.http://eprints.bbk.ac.uk/archive/00000499http://eprints.bbk.ac.uk>>. Acesso em: 2 dez. 2025.

SANTOS, M. R.; BRAZ, D. D. C.; CARVALHO, A. C. P. L. F.; TINOS, R.; PAULA, M. B. S.; DORETTO, G.; GUARNIER, E.; FILHO, D. S.; SUIAMA, D. Y.; FERREIRA, L. E.; JUNIOR, J. E. C. Machine Learning Approach for Trend Prediction to Improve Returns on Brazilian Energy Market. **Proceedings - 2022 IEEE Latin American Conference on Computational Intelligence, LA-CCI 2022**, 2022. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9981846>>. Acesso em: 27 nov. 2025.

SCHWARTZ, G. “Estimating the Dimension of a Model.” **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978. Disponível em: <<http://www.citeulike.org/user/abhishekseth/article/90008>>. Acesso em: 3 dez. 2025.

SICA, E. T.; CAMARGO, C. C. de B. The Water Use while Critical Natural Capital in the Context of the Brazilian Electric Sector. Em: IEEE Transmission And Distribution - Latin America, 2004, São Paulo. [...]. São Paulo: IEEE/PES/T&D, 2004.

TAGHORI SICA, E.; FARIAS RODRIGUES BARBOZA, L.; RUSSI BENETED, J. V.; VIEIRA PAES DE LIMA, K.; VIANA LUIS ALBANI, V.; SANTOS, E.; AVILA, S. L. Big data Analysis and Dimensionality Reduction for Predict Price Trends in the Brazilian Electricity Market

Considering Interdisciplinary Phenomena. **IEEE Latin America Transactions**, v. 23, n. 9, p. 812–821, set. 2025.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Em: **Choices, Values, and Frames***. [s.l: s.n.]

VIVIAN, A.; WOHAR, M. E. Commodity volatility breaks. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money**, v. 22, n. 2, p. 395–422, abr. 2012. . Acesso em: 2 dez. 2025.

VIZIOLI, T. **Análise do comportamento dos consumidores no âmbito dos ambientes de contratação livre e regulada do mercado brasileiro de energia elétrica**. 2017. UNB, Brasília, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/23703/3/2017_ThaisRietherVizioli.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2025.

WAGHABI, E. R.; BENEVIDES, M. R. F. Aplicação de Modelos Ocultos de Markov na Teoria dos Jogos. **Congresso da Sociedade Brasileira de Computação (CSBC)**, 2009. . Acesso em: 3 dez. 2025.

WALVIS, A.; GONÇALVES, E. D. L. **Avaliação das reformas recentes no setor elétrico brasileiro e sua relação com o desenvolvimento do mercado livre de energia** FGV-CERI. [s.l: s.n.].

XIONG, H.; MAMON, R. A self-updating model driven by a higher-order hidden Markov chain for temperature dynamics. **Journal of Computational Science**, v. 17, 2016.

XIONG, H.; MAMON, R. A higher-order Markov chain-modulated model for electricity spot-price dynamics. **Applied Energy**, v. 233–234, 2019.

YNOGUTI, C. A. Reconhecimento de Fala Contínua Usando Modelos Ocultos de Markov. 1999. . Acesso em: 27 jun. 2024.

APÊNDICE

APÊNDICE A – SCRIPT PRINCIPAL MODIFICADO

```

1.     import warnings
2.     import time
3.     import sys
4.     import numpy as np
5.     import matplotlib.pyplot as plt
6.     from hmmlearn import hmm
7.
8.     warnings.filterwarnings("ignore", category=DeprecationWarning)
9.
10.    PLOT_SHOW=True
11.    PLOT_TYPE = False
12.
13.    NUM_TEST = 100
14.    K = 50
15.    NUM_ITERS=1000
16.
17.    STOCKS=['dados_dezembros.csv']
18.
19.    #TRAIN_CHUNK_SIZE=100
20.
21.    #dirichlet_params = np.array([1., 20., 20., 20.])
22.    #dirichlet_params = np.random.randint(1,50,NUM_STATES)
23.    labels = ['Fechamento','Abertura','Alto','Baixo']
24.    likelihood_vect = np.empty([0,1])
25.    aic_vect = np.empty([0,1])
26.    bic_vect = np.empty([0,1])
27.
28.    # Possible number of states in Markov Model
29.    STATE_SPACE = range(2,15)
30.
31.    # Calculating Mean Absolute Percentage Error of predictions
32.    def calc_mape(predicted_data, true_data):
33.        return np.divide(np.sum(np.divide(np.absolute(predicted_data - true_data), true_data),
34.                            0), true_data.shape[0])
35.
36.    for stock in STOCKS:
37.        dataset = np.genfromtxt(stock, delimiter=',')
38.        predicted_stock_data = np.empty([0,dataset.shape[1]])
39.        likelihood_vect = np.empty([0,1])
40.        aic_vect = np.empty([0,1])
41.        bic_vect = np.empty([0,1])
42.        for states in STATE_SPACE:
43.            num_params = states**2 + states
44.            dirichlet_params_states = np.random.randint(1,50,states)
45.            #model = hmm.GaussianHMM(n_components=states, covariance_type='full',
46.            startprob_prior=dirichlet_params_states, transmat_prior=dirichlet_params_states,
47.            tol=0.0001, n_iter=NUM_ITERS, init_params='mc')
48.            model = hmm.GaussianHMM(n_components=states, covariance_type='diag', tol=0.0001,
49.            n_iter=NUM_ITERS)
50.            model.fit(dataset[NUM_TEST:,:])
51.            if model.monitor_.iter == NUM_ITERS:
52.                print('Increase number of iterations')
53.            sys.exit(1)

```

```

51.     likelihood_vect = np.vstack((likelihood_vect, model.score(dataset)))
52.     aic_vect = np.vstack((aic_vect, -2 * model.score(dataset) + 2 * num_params))
53.     bic_vect = np.vstack((bic_vect, -2 * model.score(dataset) + num_params *
    np.log(dataset.shape[0])))
54.
55.     opt_states = np.argmin(bic_vect) + 2
56.     print('Optimum number of states are {}'.format(opt_states))
57.
58.     for idx in reversed(range(NUM_TEST)):
59.         train_dataset = dataset[idx + 1,: ]
60.         test_data = dataset[idx,: ]
61.         num_examples = train_dataset.shape[0]
62.         #model = hmm.GaussianHMM(n_components=opt_states, covariance_type='full',
    startprob_prior=dirichlet_params, transmat_prior=dirichlet_params, tol=0.0001,
    n_iter=NUM_ITERS, init_params='mc')
63.         if idx == NUM_TEST - 1:
64.             model = hmm.GaussianHMM(n_components=opt_states, covariance_type='diag',
    tol=0.0001, n_iter=NUM_ITERS, init_params='stmc')
65.         else:
66.             # Retune the model by using the HMM paramters from the previous iterations as
    the prior
67.             model = hmm.GaussianHMM(n_components=opt_states, covariance_type='diag',
    tol=0.0001, n_iter=NUM_ITERS, init_params='')
68.             model.transmat_ = transmat_retune_prior
69.             model.startprob_ = startprob_retune_prior
70.             model.means_ = means_retune_prior
71.             # model.covars_ = covars_retune_prior
72.
73.             model.fit(np.flipud(train_dataset))
74.
75.             transmat_retune_prior = model.transmat_
76.             startprob_retune_prior = model.startprob_
77.             means_retune_prior = model.means_
78.             # covars_retune_prior = model.covars_
79.
80.             if model.monitor_.iter == NUM_ITERS:
81.                 print('Increase number of iterations')
82.                 sys.exit(1)
83.             #print('Model score : ', model.score(dataset))
84.             #print('Dirichlet parameters : ',dirichlet_params)
85.
86.             iters = 1;
87.             past_likelihood = []
88.             curr_likelihood = model.score(np.flipud(train_dataset[0:K - 1, :]))
89.             while iters < num_examples / K - 1:
90.                 past_likelihood = np.append(past_likelihood,
    model.score(np.flipud(train_dataset[iters:iters + K - 1, :])))
91.                 iters = iters + 1
92.                 likelihood_diff_idx = np.argmin(np.absolute(past_likelihood - curr_likelihood))
93.                 predicted_change = train_dataset[likelihood_diff_idx,: ] -
    train_dataset[likelihood_diff_idx + 1,: ]
94.                 predicted_stock_data = np.vstack((predicted_stock_data, dataset[idx + 1,: ] +
    predicted_change))
95.     np.savetxt('{}_forecast.csv'.format(stock),predicted_stock_data,delimiter=',',fmt='%2
    f')
96.
97.     mape = calc_mape(predicted_stock_data, np.flipud(dataset[range(100),:]))
98.     print('MAPE for the stock {} is {}'.format(stock),mape)
99.
100.         if PLOT_TYPE:
101.             hd1_p = plt.plot(range(100), predicted_stock_data);
102.             plt.title('Previsão preço dos produtos')

```

```
103.         plt.legend(iter(hdl_p), ('Fechamento', 'Abertura', 'Alto', 'Baixo'))
104.         plt.xlabel('Time steps')
105.         plt.ylabel('Price')
106.         plt.figure()
107.         hdl_a = plt.plot(range(100), np.flipud(dataset[range(100), :]))
108.         plt.title('Preço atual dos produtos')
109.         plt.legend(iter(hdl_p), ('Fechamento', 'Abertura', 'Alto', 'Baixo'))
110.         plt.xlabel('Time steps')
111.         plt.ylabel('Preço')
112.     else:
113.         for i in range(4):
114.             plt.figure()
115.             plt.plot(range(100), predicted_stock_data[:, i], 'k-', label = ' Preço de
Previsão '+labels[i]+'');
116.             plt.plot(range(100), np.flipud(dataset[range(100), i]), 'r--', label =
'Preço atual '+labels[i]+'')
117.             plt.xlabel('Time steps')
118.             plt.ylabel('Price')
119.             plt.title(labels[i]+' Preços'+ ' dos '+' produtos dezembros')
120.             plt.grid(True)
121.             plt.legend(loc = 'upper left')
122.
123.
124.     if PLOT_SHOW:
125.         plt.show(block=False)
```

APÊNDICE B – SCRIPT PARA GRÁFICOS DE PRECIPITAÇÃO POR BACIAS VS. VOLUME DE NEGOCIAÇÃO

```

1. import numpy as np
2. import pandas as pd
3. import os
4. import matplotlib.pyplot as plt
5. from matplotlib.ticker import PercentFormatter
6. from matplotlib import pyplot
7. import datetime as dt
8. from datetime import datetime, timedelta
9. import seaborn as sns
10. import plotly.express as px
11. import pandas as pd
12. import plotly.offline as py
13. import plotly.graph_objs as go
14. py.init_notebook_mode(connected=True)
15. from plotly.offline import init_notebook_mode, plot_mpl
16.
17.
18. # importa arquivo xlsx de mercado e precipitação
19. arquivo = 'C:/Users/Karem/Downloads/dados_mercado_candles.xlsx'
20. arquivo2 = 'C:/Users/Karem/Downloads/dados_previsao_precip.xlsx'
21.
22.
23. df = pd.read_excel(arquivo,0)
24. df['Produto'] = df['Produto'].apply(lambda _: str(_)[0:7])
25. df.set_index(df['Data'], inplace = True)
26.
27. # df['anoDoProduto'] = pd.DatetimeIndex(df['Produto']).year
28. # df['mesDoProduto'] = pd.DatetimeIndex(df['Produto']).month
29.
30. df2 = pd.read_excel(arquivo2,0)
31. df3 = df2.groupby(["DataPrevisao"]).sum()
32. df_precipitacaoPorBacia = df2.groupby(["Bacia","DataPrevisao"]).sum().reset_index()
33. df['Precip'] = df3['Precip']
34.
35. df_teste = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] == 'ARAGUAIA' ]
36.
37.
38. # seleciona as bacias
39.
40. listaBacia = ['ARAGUAIA', 'BALBINA', 'CAPIVARI', 'GRANDE', 'IGUAÇU', 'JACUI',
                'MADEIRA', 'PARANA', 'PARANAIBA',
                'PARAIBA_SUL', 'PARANAPANEMA', 'SAO_FRANCISCO', 'XINGU', 'URUGUAI', 'TELES_PIRES',
                'TIETE', 'CURUA_UNA', 'TOCANTIS']
41.
42. listaAnos = ['2019', '2020']
43. listaMeses = ['06', '07', '08', '09', '10', '11', '12']
44.
45. # for a in listaAnos:
46. #     for m in listaMeses:
47.
48. #         dfProduto1 = df.loc[df['Produto'] == a+'-'+m]
49. #         x = dfProduto1['Data']
50.
51. #         plt.subplot(2, 1, 1)
52. #         # plt.plot( x, dfProduto1['Media'], 'bs', color = 'green') # green bolinha

```

```

53. #     plt.plot( x, dfProduto1['Media'], '--', color='green', label = 'R$ médio') # linha
pontilha orange
54.
55. #     # plt.plot( x, dfProduto1['Max'], 'r^') # red triangulo
56. #     plt.plot( x, dfProduto1['Max'], '--', color='red', label = 'R$ máx') # linha
tracejada azul
57.
58. #     # plt.plot( x, dfProduto1['Min'], 'bs' , color = 'orange') # red triangulo
59. #     plt.plot( x, dfProduto1['Min'], '--', color='orange', label = 'R$ min') # linha
tracejada azul
60.
61. #     # plt.plot( x, dfProduto1['Abertura'], 'o' , color = 'darkred') # red triangulo
62. #     plt.plot( x, dfProduto1['Abertura'], '--', color='darkred', label = 'R$
Abertura') # linha tracejada azul
63.
64.
65. #     # plt.plot( x, dfProduto1['Fechamento'], 'o' , color = 'cornflowerblue') # red
triangulo
66. #     plt.plot( x, dfProduto1['Fechamento'], '--', color='cornflowerblue', label = 'R$
Fechamento') # linha tracejada azul
67.
68. #     plt.bar( x,dfProduto1['Volume'], label='Volume', color = 'lightblue')
69.
70. #     plt.legend(loc=2)
71. #     plt.title('Produto'+ ' '+a+'-'+m,fontsize='x-large')
72.
73. #     plt.grid(True)
74. #     plt.xlabel("Data")
75. #     plt.ylabel("Preço (R$)")
76. #     plt.xticks(rotation=25)
77. #     # plt.figure(figsize=(5, 1))
78.
79. #     # plt.show()
80.
81. #     plt.subplot(2, 1, 2)
82. #     plt.bar(x, dfProduto1['Precip'], color='pink', label = 'Precipitação') # linha
pontilha orange
83. #     plt.grid(True)
84. #     plt.title('Precip acumulada para o Produto'+ ' '+a+'-'+m, fontsize='x-large')
85. #     plt.xlabel("Data")
86. #     plt.ylabel("precip acumulada (mm)")
87. #     plt.xticks(rotation=25)
88. #     # plt.figure(figsize=(5,10))
89.
90. #     plt.show()
91.
92.
93. #     # plt.savefig('Produto'+a+'-'+m+' valores de mercado.png')
94.
95. #gráficos volume x precipitação
96.
97. for a in listaAnos:
98.     for m in listaMeses:
99.
100.         dfProduto1 = df.loc[df['Produto'] == a+'-'+m]
101.         x = dfProduto1['Data']
102.
103.         plt.subplot(2, 1, 1)
104.         # plt.plot( x, dfProduto1['Media'], 'bs', color = 'green') # green bolinha
105.         plt.plot( x, dfProduto1['Media'], '-', color='red', label = 'R$ médio') #
linha pontilha orange
106.

```

```

107.         # plt.plot( x, dfProduto1['Max'], 'r^') # red triangulo
108.         # plt.plot( x, dfProduto1['Max'], '--', color='red', label = 'R$ máx') #
linha tracejada azul
109.
110.         # plt.plot( x, dfProduto1['Min'], 'bs' , color = 'orange') # red triangulo
111.         # plt.plot( x, dfProduto1['Min'], '--', color='orange', label = 'R$ min') #
linha tracejada azul
112.
113.         # plt.plot( x, dfProduto1['Abertura'], 'o' , color = 'darkred') # red
triangulo
114.         # plt.plot( x, dfProduto1['Abertura'], '--', color='darkred', label = 'R$
Abertura') # linha tracejada azul
115.
116.
117.         # plt.plot( x, dfProduto1['Fechamento'], 'o' , color = 'cornflowerblue') #
red triangulo
118.         # plt.plot( x, dfProduto1['Fechamento'], '--', color='cornflowerblue', label
= 'R$ Fechamento') # linha tracejada azul
119.
120.         plt.bar( x,dfProduto1['Volume'], label='Volume', color = 'lightblue')
121.
122.         plt.legend(loc=2)
123.         plt.title('Produto'+ ' '+a+'-'+m,fontsize='x-large')
124.
125.         plt.grid(True)
126.         # plt.xlabel("Data")
127.         plt.ylabel("Preço (R$)")
128.         plt.xticks(rotation=25, color='white')
129.         # plt.figure(figsize=(5, 1))
130.         # plt.show()
131.
132.         plt.subplot(2, 1, 2)
133.         plt.bar(x, dfProduto1['Precip'], label = 'Precipitação', color='pink') #
linha pontilha orange
134.         plt.grid(True)
135.         # plt.title('Precip acumulada para o Produto'+ ' '+a+'-'+m, fontsize='x-
large')
136.         plt.xlabel("Data")
137.         plt.ylabel("precip acu. prevista (mm)")
138.         plt.xticks(rotation=25)
139.         # plt.figure(figsize=(5,10))
140.         for bacia in listaBacia:
141.             plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
bacia]['DataPrevisao'] ,df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia']
== bacia]['Precip'] , label = 'Precipitação')
142.             plt.grid(True)
143.             plt.ylabel('precipitação acu'+ ' '+bacia)
144.             plt.xticks(rotation=25, color='white')
145.             plt.subplot(2, 1, 3)
146.             plt.show()
147.
148.
149.
150.         #GRAFICOS BACIAS
151.
152.         for bacia in listaBacia:
153.             plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
bacia]['DataPrevisao'] ,df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia']
== bacia]['Precip'] , label = 'Precipitação')
154.             plt.grid(True)
155.             plt.ylabel('precipitação acu'+ ' '+bacia)
156.             plt.xticks(rotation=25)

```

```

157.         plt.show()
158.
159.
160.
161.
162.
163.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'MADEIRA']['DataPrevisao']
,df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'MADEIRA']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='blue')
164.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'PARANA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia
'] == 'PARANA']['Precip'], label = 'Precipitação', color='red')
165.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'PARANAIBA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Ba
cia'] == 'PARANAIBA']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='yellow')
166.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'TIETE']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'
] == 'TIETE']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='brown')
167.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'TELES_PIRES']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['
Bacia'] == 'TELES_PIRES']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='pink')
168.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'PARANAPANEMA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia[
'Bacia'] == 'PARANAPANEMA']['Precip'] , label = 'Precipitação',
color='lightblue')
169.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'GRANDE']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia
'] == 'GRANDE']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='blue')
170.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'URUGUAI']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Baci
a'] == 'URUGUAI']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='deeppink')
171.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'CAPIVARI']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bac
ia'] == 'CAPIVARI']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='yellowgreen')
172.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'JACUI']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'
] == 'JACUI']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='olive')
173.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'SAO_FRANCISCO']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia
['Bacia'] == 'SAO_FRANCISCO']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='salmon')
174.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'XINGU']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'
] == 'XINGU']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='yellow')
175.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'PARAIBA_SUL']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia[
'Bacia'] == 'PARAIBA_SUL']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='brown')
176.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'CURUA_UNA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Ba
cia'] == 'CURUA_UNA']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='pink')
177.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'TOCANTIS']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bac
ia'] == 'TOCANTIS']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='lightblue')
178.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'BALBINA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Baci
a'] == 'BALBINA']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='orange')
179.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'IGUAÇU']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia
'] == 'IGUAÇU']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='aquamarine')
180.         # plt.bar(df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
'ARAGUAIA']['DataPrevisao'],df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bac
ia'] == 'ARAGUAIA']['Precip'] , label = 'Precipitação', color='teal')
181.         # plt.show()
182.
183.

```

```

184.
185.     df_precip1 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
186.         'MADEIRA'].set_index('DataPrevisao')
187.     df_precip2 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
188.         'PARANA'].set_index('DataPrevisao')
189.     df_precip3 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
190.         'PARANAIBA'].set_index('DataPrevisao')
191.     df_precip4 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
192.         'TIETE'].set_index('DataPrevisao')
193.     df_precip5 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
194.         'TELES_PIRES'].set_index('DataPrevisao')
195.     df_precip6 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
196.         'PARANAPANEMA'].set_index('DataPrevisao')
197.     df_precip7 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
198.         'GRANDE'].set_index('DataPrevisao')
199.     df_precip8 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
200.         'URUGUAI'].set_index('DataPrevisao')
201.     df_precip9 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
202.         'CAPIVARI'].set_index('DataPrevisao')
203.     df_precip10 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
204.         'JACUI'].set_index('DataPrevisao')
205.     df_precip11 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
206.         'SAO_FRANCISCO'].set_index('DataPrevisao')
207.     df_precip12 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
208.         'XINGU'].set_index('DataPrevisao')
209.     df_precip13 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
210.         'PARAIBA_SUL'].set_index('DataPrevisao')
211.     df_precip14 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
212.         'CURUA_UNA'].set_index('DataPrevisao')
213.     df_precip15 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
214.         'TOCANTIS'].set_index('DataPrevisao')
215.     df_precip16 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
216.         'BALBINA'].set_index('DataPrevisao')
217.     df_precip17 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
218.         'IGUAÇU'].set_index('DataPrevisao')
219.     df_precip18 = df_precipitacaoPorBacia.loc[df_precipitacaoPorBacia['Bacia'] ==
220.         'ARAGUAIA'].set_index('DataPrevisao')
221.
222.     df['precip1'] = df_precip1['Precip']
223.     df['precip2'] = df_precip2['Precip']
224.     df['precip3'] = df_precip3['Precip']
225.     df['precip4'] = df_precip4['Precip']
226.     df['precip5'] = df_precip5['Precip']
227.     df['precip6'] = df_precip6['Precip']
228.     df['precip7'] = df_precip7['Precip']
229.     df['precip8'] = df_precip8['Precip']
230.     df['precip9'] = df_precip9['Precip']
231.     df['precip10'] = df_precip10['Precip']
232.     df['precip11'] = df_precip11['Precip']
233.     df['precip12'] = df_precip12['Precip']
234.     df['precip13'] = df_precip13['Precip']
235.     df['precip14'] = df_precip14['Precip']
236.     df['precip15'] = df_precip15['Precip']
237.     df['precip16'] = df_precip16['Precip']
238.     df['precip17'] = df_precip17['Precip']
239.     df['precip18'] = df_precip18['Precip']

```

