

ESTUDO DAS CORRENTES DE FOUCAULT COM APLICAÇÃO NA FRENAGEM DE MÁQUINAS ELÉTRICAS

Alex Souza Waltrick, Denivaldo Pereira da Silva

Instituto Federal de Santa Catarina

Câmpus Jaraguá do Sul – Rau – Curso Bacharelado em Engenharia Elétrica

e-mail: alex.w@aluno.ifsc.edu.br, denivaldo.silva@ifsc.edu.br

Trabalho de Conclusão de Curso – 30/08/2024

Resumo – Este artigo apresenta um estudo do eletromagnetismo voltado para as correntes de Foucault e sua aplicação na frenagem de máquinas elétricas, sendo demonstradas soluções analíticas para um amplo entendimento teórico sobre este tipo de frenagem. Além disso, são descritas suas vantagens, principais aplicações, bem como uma contextualização com os demais sistemas de frenagem existentes na atualidade. Por fim, visando validar as soluções analíticas propostas, são apresentados gráficos e resultados de simulações computacionais envolvendo os principais parâmetros deste tipo de freio.

Palavras-Chave – Densidade de corrente, Equação de difusão, correntes de Foucault, Sistemas de frenagem.

STUDY OF EDDY CURRENTS WITH APPLICATION IN THE BRAKING OF ELECTRIC MACHINES

Abstract – This paper presents a study on electromagnetism focused on eddy currents and their application in the braking of electric machines. Analytical solutions are demonstrated for a broad theoretical understanding of this type of braking. In addition, its advantages and main applications are described, as well as a contextualization with other existing braking systems. Finally, in order to validate the proposed analytical solutions, graphs and results of computer simulations involving the main parameters of this type of brake are presented.

Keywords – Current density, Diffusion equation, Eddy current brake, braking systems.

I. INTRODUÇÃO

De acordo com [1], as máquinas de indução são consideradas uma das 10 maiores invenções de todos os tempos, pois toda a eletrificação mundial que ocorreu a partir do século XIX, dependeu delas. No cenário atual, o motor elétrico desempenha um papel central na Indústria 4.0, sendo um dos principais integrantes da automação e eficiência nos processos industriais. Sua capacidade de converter energia elétrica em movimento preciso e controlável é essencial para a operação de máquinas e sistemas autônomos, permitindo a produção em larga escala e personalização em massa.

Dentre as partes integrantes de um sistema com motor elétrico, o freio desempenha um papel crucial na segurança,

precisão, eficiência energética e vida útil do equipamento. Para [2], freios são dispositivos que transformam a energia cinética de um corpo em energia térmica, com a finalidade de reduzir seu movimento. A escolha de usar ou não um freio, dependerá das necessidades e requisitos específicos do sistema em que o motor está sendo usado. Com isso, é compreensível que diferentes tipos de freios possam ser usados em motores elétricos, como mecânicos, eletromagnéticos, de regeneração, dentre outros.

O freio eletromagnético, também chamado de freio de correntes induzidas ou de correntes de Foucault, tem sido amplamente estudado pela indústria para aplicação como freio de emergência, ou auxiliar, em trens e metrô. Um exemplo é o trem de alta velocidade da China, o Maglev. Devido à enorme solicitação de energia para desacelerar o Maglev, que ultrapassa os 400 km/h, o tradicional modelo mecânico não é suficiente para executar essa tarefa devido à alta inércia e grande desgaste do freio pelo calor gerado [3]. Para [4], o freio de Foucault é um dispositivo eletromecânico rotativo que, quando acionado por um motor qualquer, apresenta em seu eixo um conjugado resistente ajustável através de uma corrente de controle (excitação). Além disso, a aplicação do freio de Foucault pode dispensar a utilização de conversor de frequência em situações em que a desaceleração da máquina elétrica deve acontecer de forma controlada.

Dentre os trabalhos acadêmicos que estudam freios por correntes de Foucault, é proposto em [5] o protótipo de um freio eletromagnético por correntes de Foucault construído e ensaiado com o intuito de fornecer um equipamento confiável, robusto e de fácil manuseio para ensaios de motores elétricos de até 2 cv. Um estudo teórico e experimental sobre freios por correntes de Foucault é apresentado em [6], onde o autor utiliza uma aproximação exponencial para descrever o comportamento da não linearidade da curva de magnetização do material ferromagnético acoplado ao eixo de um motor elétrico. A elaboração de bancadas didáticas para automação industrial baseada em controladores lógicos programáveis e freios de Foucault é apresentada em [7]. E em [8], o autor faz um estudo de correntes induzidas em meios maciços ferromagnéticos, expondo equações, gráficos e resultados de simulações computacionais para aplicação no projeto de freios por correntes de Foucault.

Este trabalho apresenta um estudo do eletromagnetismo voltado para as correntes de Foucault e sua aplicação na frenagem de máquinas elétricas, tomando-se como principais referências os trabalhos de Davies e Dietrich [6] e [8].

A organização deste artigo está dividida em seções da seguinte forma: A seção II aborda os principais componentes

de um motor de indução, introduz o freio de Foucault, apresenta a dedução da equação de difusão de corrente, além de delimitar o tema de estudo, apresentando as considerações adotadas no projeto deste tipo de freio. Na seção III, são deduzidas as equações que relacionam torque, velocidade e o número de polos, apresentando seus principais conceitos. A seção IV é dedicada ao estudo da reação de armadura, associando-a com as equações deduzidas na seção III. Na seção V, são apresentados os resultados obtidos, comparando-os graficamente com os resultados apresentados em [6] e [8]. Por fim, na seção VI, são apresentadas as conclusões desta pesquisa.

II. FREIO DE FOUCAULT: UMA ABORDAGEM ELETROMAGNÉTICA INTRODUTÓRIA

A. Motor de indução

Nikola Tesla (1856-1943), inventor e engenheiro nascido na Croácia e Galileo Ferraris (1847-1897), físico italiano da Universidade de Turim, sem que tivessem qualquer tipo de cooperação mútua, inventaram o motor de indução baseado no princípio do campo magnético girante.

Algumas das partes fundamentais do motor elétrico são:

- *Estator*: É a parte fixa do motor constituída de finas chapas ferromagnéticas empilhadas entre si, que abrigam as bobinas de fio condutor por onde flui a corrente elétrica alternada. Quando a corrente passa por essas bobinas, elas criam um campo magnético girante que interage com o rotor;

- *Rotor*: É a parte rotativa do motor, geralmente montada em um eixo e apoiado em rolamentos. Quando o campo magnético do estator interage com o rotor, são gerados forças e torque, fazendo com que o rotor gire. O movimento do rotor é o que realiza o trabalho mecânico desejado. Nos motores de indução, os rotores podem ser do tipo *gaiola de esquilo* com alumínio injetado, ou podem ser do tipo *bobinado*.

Os motores de indução são conhecidos por sua robustez, simplicidade de construção e baixo custo de manutenção. Em geral, eles possuem alta eficiência energética e, dependendo de sua aplicabilidade, são projetados para uma ampla faixa de velocidades, potência e torque. Suas principais aplicações incluem bombas, ventiladores, compressores e transportadores em ambientes industriais. Além disso, são ideais para sistemas de acionamento elétrico em fábricas e edifícios comerciais devido à sua durabilidade e capacidade de operar em condições adversas.

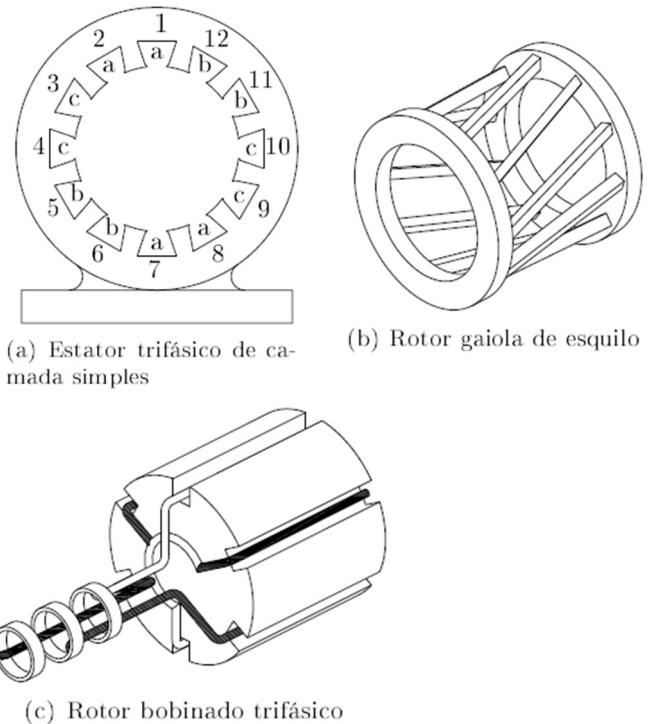


Fig. 1. Geometria do estator e de rotores de um motor de indução. Retirado de [9].

B. Freio de Foucault

É um tipo de freio que se baseia na geração de correntes de Foucault em um meio condutor maciço em movimento, convertendo energia cinética em calor e produzindo forças magnéticas que se opõem à continuidade do movimento que deu origem a essas correntes induzidas.

O princípio de funcionamento do freio de Foucault se baseia no seguinte fenômeno: ao se submeter um meio condutor maciço a uma variação de campo magnético – um degrau por exemplo – ocorre indução de correntes nesse meio que se opõem à penetração do campo, de acordo com a Lei de Lenz. A interação resultante da corrente induzida com o campo magnético que a originou resulta em uma força de repulsão mútua. Se, por exemplo, a variação do campo magnético for provocada por uma bobina onde circula uma corrente elétrica, haverá o aparecimento de uma força de repulsão entre o meio condutor e a bobina que decairá com o tempo. E devido à resistividade do condutor, haverá dissipação de potência neste material em decorrência das perdas por efeito Joule. No freio por correntes de Foucault, a variação do campo magnético é, geralmente, provocada pela movimentação do meio condutor ao se aproximar e se afastar da região de onde provém o campo magnético indutor e, por sua vez, a energia dissipada é fornecida pela força motriz que realizou o movimento [8].

Na prática, o freio de Foucault é montado de forma que o motor que se deseja frear, provoca o movimento do meio condutor maciço que está acoplado ao seu eixo, sendo este meio denominado *região ativa*. Uma peça polar, quando excitada por corrente elétrica, gera uma distribuição de campo magnético variável no tempo na região ativa em movimento. Na Figura 2, é exposto o projeto de um freio confeccionado

com 4 eletroímãs e um disco de alumínio, sendo este um dos tipos de freio mais comuns, disponíveis no mercado [9].

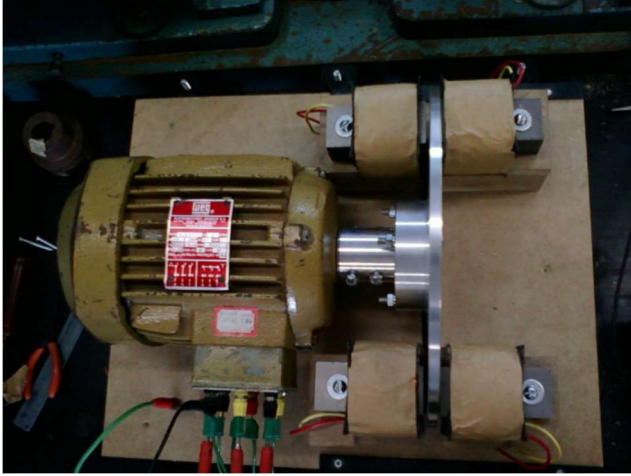


Fig. 2. Projeto de um freio por correntes de Foucault. Retirado de [9]

C. Equação de difusão de corrente

A dedução da equação de difusão da densidade de corrente \vec{J} , para meios magnéticos lineares e condutores é apresentada a seguir.

Partindo-se da *Lei de Faraday* da indução eletromagnética

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

, sendo \vec{B} o vetor indução magnética [T] ou [Wb/m²] e \vec{E} o vetor campo elétrico [V/m].

A equação (1) descreve como um campo magnético variável no tempo pode induzir um campo elétrico também variável no tempo. Quando o campo magnético indutor está aumentando, a *força eletromotriz* (f.e.m) induzida gera uma corrente que, por sua vez, produz um campo magnético induzido que se opõe ao aumento do campo magnético indutor. Da mesma forma, quando o campo magnético indutor está diminuindo, a f.e.m. induzida gera uma corrente que produz um campo magnético induzido que se opõe à diminuição do campo magnético indutor. Isso ocorre de acordo com a *Lei de Lenz*, que está associada ao fenômeno do surgimento de correntes induzidas na *região ativa*. Essa lei está implícita na equação (1) da *Lei de Faraday*, indicada pelo sinal negativo nela presente.

Considere ainda que:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (2)$$

$$\vec{B} = \vec{H} \mu_r \mu_0 \quad (3)$$

, sendo

ρ : Resistividade elétrica [Ωm]

\vec{J} : Vetor densidade de corrente [A/m^2]

μ_r : Permeabilidade magnética relativa

μ_0 : Permeabilidade magnética do vácuo [$\text{T}\cdot\text{m}/\text{A}$]

\vec{H} : Intensidade de campo magnético [A/m]

e a permeabilidade magnética μ da *região ativa* é definida como

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (4)$$

Então, substituindo-se (2), (3) e (4) em (1) e considerando-se ρ e μ_r constantes:

$$\nabla \times \vec{J} = - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5)$$

Aplicando-se o rotacional em (5) e sabendo-se que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{J}) &= - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J} &= - \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t} \end{aligned} \quad (6)$$

Explicitando-se $\nabla \cdot \vec{J}$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

, sendo ρ_v a densidade volumétrica de cargas [C/m^3].

A equação (7) é a *equação da continuidade* para passagem de corrente elétrica em um meio condutor.

E sabendo-se ainda que:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (8)$$

Por fim, substituindo-se (7) e (8) em (6), obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (9)$$

que representa a *equação de difusão de corrente* ou de vetores \vec{J} em um meio condutor. Esta é a principal equação para estudo das correntes de Foucault.

D. Considerações adotadas

Adota-se o sistema de coordenadas cartesianas, sendo:

- Distâncias ao longo do eixo x , associadas ao movimento do rotor (*região ativa*) na direção periférica/tangencial;
- Distâncias ao longo do eixo y , são mensuradas na direção radial, ao longo da espessura da região ativa, sendo $y=0$ a região de fronteira entre o entreferro e a superfície da região ativa;

- Distâncias ao logo do eixo z , serão medidas na direção axial do eixo do rotor.

Além das considerações relacionadas ao sistema de coordenadas cartesianas, considera-se ainda que:

- As correntes de Foucault ocorrem apenas na direção axial;
- A distribuição espacial e a variação temporal das correntes de Foucault ambas possuem componentes sinusoidais;
- A espessura da região ativa é muito maior do que a profundidade de penetração das correntes de Foucault.

A Figura 3 apresenta a topologia do freio considerado no equacionamento apresentado ao longo deste artigo.

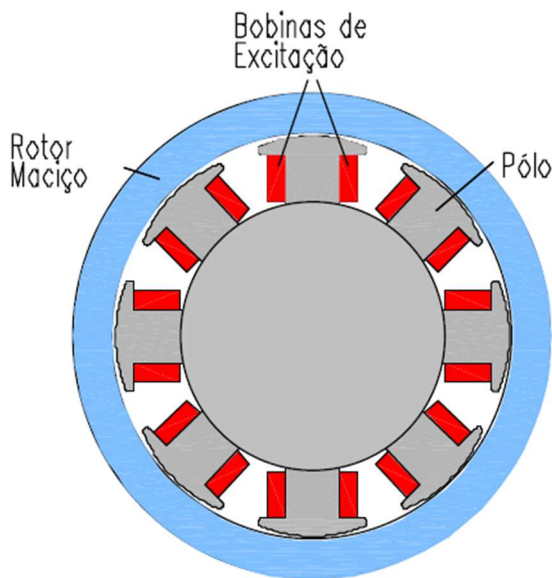


Fig. 3. Freio por correntes de Foucault sob estudo. Retirado de [8].

A Figura 4 é uma porção da vista em corte do freio de Foucault apresentado na Figura 3, indicando as coordenadas (x, y, z) do sistema para o freio sob estudo, sendo I_{exc} a corrente de excitação responsável por gerar os polos magnéticos.

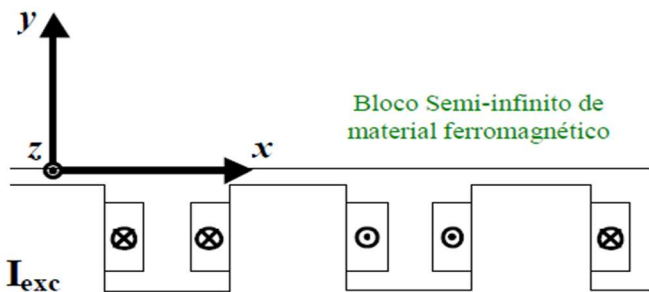


Fig. 4. Sistema de coordenadas adotado para estudo do freio por correntes de Foucault. Adaptado de [8].

A região ativa é considerada um material ferromagnético que ocupa integralmente o eixo y de 0 (zero) a infinito. Em

função disso, nesta representação planar considera-se um bloco *semi-infinito*.

III. RELAÇÃO DO TORQUE E VELOCIDADE COM O NÚMERO DE POLOS

Na prática, o dimensionamento de um freio de Foucault parte de dados previamente conhecidos de torque e rotação do motor.

As correntes de Foucault que fluem na região ativa, produzem *força magnetomotriz* (f.m.m) de *reação de armadura*, que está diretamente relacionada com o torque e a velocidade.

Sendo assim, as deduções apresentadas a seguir, visam a encontrar as equações que relacionam o número de polos, torque e rotação em um determinado ponto de operação do motor, além de estimar a reação de armadura.

A. Cálculo da distribuição da densidade de corrente

Para este equacionamento, considera-se o sistema de coordenadas apresentado na Figura 4.

Partindo-se da equação que define a frequência do rotor (região ativa):

$$f = p \cdot n \quad (10)$$

, sendo

f : Frequência do rotor [Hz]

p : Número de pares de polos

n : Número de rotações por segundo [rps]

E sabendo-se que a equação (10) está relacionada com a frequência angular ω [rad/s], sendo

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (11)$$

Então, substituindo-se a equação (10) em (11), obtém-se a frequência angular do rotor:

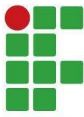
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot p \cdot n \quad (12)$$

Considera-se que qualquer metal, em baixas frequências, no *domínio da quase estática*, obedece à equação de difusão de corrente descrita em (9).

E a partir da equação (1), verifica-se que o vetor densidade de corrente \vec{J} , ao se admitir atuar apenas na direção axial, não varia espacialmente ao longo do eixo z se o campo \vec{B} estiver atuando apenas no plano xy .

Assim, reescrevendo-se a equação (9) do laplaciano vetorial de \vec{J} em coordenadas cartesianas e considerando-se $\vec{J} = J_z \hat{k}$ constante ao longo do eixo z , de forma que $\frac{\partial^2 J_z}{\partial z^2} = 0$, determina-se então a *equação de difusão de corrente bidimensional*:

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial t} \quad (13)$$



A solução geral da equação (13) utilizando separação de variáveis é dada por

$$J_z = J(y) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (14)$$

, sendo λ o comprimento de onda das induções de corrente na região ativa e que corresponde a um arco de circunferência entre polos consecutivos.

Reescrevendo a equação (14) na forma exponencial:

$$J_z = \text{Re}\left\{J(y) \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}\right\} \quad (15)$$

Determinando a derivada de segunda ordem em relação a x :

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial x^2} = J(y) \cdot (-j^2) \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (16)$$

E em relação a y :

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 J(y)}{\partial y^2} \cdot \left[e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}\right] \quad (17)$$

Além disso, reescrevendo o lado direito da equação (13) na forma exponencial:

$$\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \cdot J(y) \cdot j \cdot \omega \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (18)$$

Substituindo (16), (17), (18) em (13):

$$-J(y) \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\partial^2 J(y)}{\partial y^2} = \frac{\mu}{\rho} \cdot j \cdot \omega \cdot J(y) \quad (19)$$

Simplificando (19):

$$\frac{d^2 J(y)}{dy^2} - J(y) \cdot \left[\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \frac{\mu \cdot \omega}{\rho}\right] = 0 \quad (20)$$

Considere

$$\alpha^2 = \frac{\mu \cdot \omega}{2\rho} \quad (21)$$

, onde $\alpha^{-1} = \delta$ é a *profundidade de penetração das correntes induzidas* [m].

Substituindo (21) em (20):

$$\frac{d^2 J(y)}{dy^2} - J(y) \left[\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + 2 \cdot j \cdot \alpha^2\right] = 0 \quad (22)$$

Considera-se também

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + 2 \cdot j \cdot \alpha^2 \quad (23)$$

, sendo k uma constante complexa.

Assim, é obtida uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 J(y)}{dy^2} - k^2 \cdot J(y) = 0 \quad (24)$$

A solução geral para este tipo de expressão é dada por:

$$J(y) = A_1 \cdot e^{k \cdot y} + A_2 \cdot e^{-k \cdot y} \quad (25)$$

Para o freio sob estudo, leva-se em conta as seguintes condições de contorno:

- (i) $J_z = 0$ para $y \rightarrow \infty$
- (ii) $J_z = J_{z(\text{máx})}$ para $y = 0$

As condições de contorno apresentadas acima são válidas, pois J_z diminui de forma exponencial à medida que penetramos mais fundo no material condutor da região ativa, reduzindo-se na razão e^{-1} a cada distância δ . Consequentemente, o valor máximo de J_z tende a ocorrer na superfície da região ativa e sua magnitude tende a zero à medida que a profundidade se aproxima do infinito. Assim, pode-se considerar $A_1 = 0$, $A_2 = J_{z(\text{máx})}$ e aplicando-se em (25) as condições de contorno citadas acima, então:

$$J(y) = J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-k \cdot y} \quad (26)$$

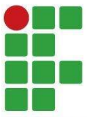
Substituindo (26) em (14) e (15):

$$J_z = J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-k \cdot y} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (27-a)$$

$$J_z = \text{Re}\left\{J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-k \cdot y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)}\right\} \quad (27-b)$$

As equações (27-a) e (27-b) fornecem os valores da magnitude e da fase de J_z para qualquer posição da região ativa como função das variáveis (x , y e t). Além disso, supõe-se que μ , ω , λ e α são constantes, além de k que é a constante complexa.

A partir da equação (23) define-se:



$$R^2 \cdot e^{2j} = k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j \cdot 2 \cdot \alpha^2 \quad (28)$$

$$R^4 = \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)^2 + (2 \cdot \alpha^2)^2 \quad (29-a)$$

$$R = \sqrt[4]{\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)^2 + (2 \cdot \alpha^2)^2} \quad (29-b)$$

$$2\phi = tg^{-1}\left(\frac{2 \cdot \alpha^2}{\frac{4\pi^2}{\lambda^2}}\right) \quad (30)$$

A partir de (28):

$$k = R^{j\phi} \quad (31)$$

E explicitando-se (31) em partes real e imaginária, então:

$$k = R(\cos\phi + j \cdot \text{sen}\phi) \quad (32)$$

Substituindo (32) em (27-b):

$$J_z = \text{Re} \left\{ J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-R(\cos\phi + j \cdot \text{sen}\phi)y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \right\} \quad (33)$$

Ou ainda:

$$J_z = \text{Re} \left\{ J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-R \cdot y \cos\phi} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - R \cdot y \text{sen}\phi\right)} \right\} \quad (34)$$

Considerando-se, respectivamente, que β e Y representam as projeções de R nos eixos horizontal e vertical:

$$\beta = R \cdot \cos\phi \quad (35)$$

$$Y = R \cdot \text{sen}\phi \quad (36)$$

Aplicando-se (35) e (36) em (34):

$$J_z = \text{Re} \left\{ J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-\beta \cdot y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - Y \cdot y\right)} \right\} \quad (37)$$

Considerando-se que $\alpha\sqrt{2} \gg \frac{2\pi}{\lambda}$, ou ainda, que a profundidade de penetração δ das correntes induzidas é muito menor do que o comprimento de onda λ , então simplificando-se (29-b), (35) e (36), obtêm-se: $R = \alpha\sqrt{2}$ e $\beta = Y = \alpha$. Então, a equação (37) pode ser simplificada como:

$$J_z = J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \alpha \cdot y\right) \quad (38-a)$$

$$J_z = \text{Re} \left\{ J_{z(\text{máx})} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \alpha \cdot y\right)} \right\} \quad (38-b)$$

Portanto, a partir das equações (38-a) e (38-b), para y (camadas da região ativa) constante, a densidade de corrente J_z terá um comportamento periódico cossenoidal, variando no tempo (t) e no espaço (x na direção periférica). E, além disto, para duas camadas distintas, $y_2 > y_1$, as respectivas amplitudes J_1 e J_2 de J_z tem um decaimento exponencial com $J_2 < J_1$ e também há uma defasagem angular de J_z entre as camadas da região ativa.

B. Dedução da equação do campo magnético na região ativa

O estudo do campo magnético gerado na região ativa do freio de Foucault, em decorrência da distribuição das densidades de correntes induzidas, se faz necessário para compreender os princípios e o desempenho desse dispositivo, uma vez que o freio de Foucault utiliza correntes induzidas para gerar um campo magnético induzido que, por sua vez, exerce uma força magnética de frenagem na região ativa que se encontra em movimento acoplado ao eixo do motor. Neste contexto, é importante explorar o equacionamento do campo magnético nessa região específica.

Para o cálculo da distribuição (espacial e temporal) do campo \vec{H} , utiliza-se inicialmente a equação (39) da Lei de indução de Faraday, pois ela descreve como uma variação temporal no campo magnético induz um campo elétrico que também é variável no tempo:

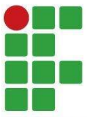
$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (39)$$

Como $\vec{J} = J_z \hat{k}$ e considerando-se que na equação (2) do campo elétrico, E_x e E_y são nulos, então:

$$E_z \hat{k} = \rho J_z \hat{k} \quad (40)$$

Aplicando-se (40) em (39):

$$(\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (E_z \hat{k}) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (41)$$



Sabendo-se que o vetor \vec{H} , assim como o vetor \vec{B} estão definidos no plano xy , e como E_x e E_y são nulos, então:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \hat{j} = -\mu \left[\frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{j} \right] \quad (42)$$

A partir de (42), obtém-se:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (43)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (44)$$

Se os campos E e H são compostos por funções periódicas que variam no tempo, então:

$$H_x = H_{x(máx)} e^{j(\omega t + \theta_x)} \quad (45)$$

$$H_y = H_{y(máx)} e^{j(\omega t + \theta_y)} \quad (46)$$

Logo, diferenciando-se H_x e H_y em relação à t :

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = j\omega H_x \quad (47)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = j\omega H_y \quad (48)$$

Substituindo (47) em (43) e (48) em (44):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu j\omega H_x \quad (49)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu j\omega H_y \quad (50)$$

Aplicando-se (37) em (40):

$$E_z = \rho \cdot J_{z(máx)} \cdot e^{-(\beta + j\gamma)y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (51)$$

Assim, diferenciando-se (51) em relação à y , então:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -(\beta + j\gamma) \rho J_{z(máx)} e^{-(\beta + j\gamma)y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (52)$$

E igualando-se (52) a (49), obtém-se a intensidade do campo magnético ao longo do eixo x :

$$H_x = \frac{(\beta + j\gamma)}{j\mu\omega} \rho J_{z(máx)} e^{-(\beta + j\gamma)y} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (53)$$

Aplicando-se (21) em (53):

$$H_x = \frac{(\gamma - j\beta)}{2\alpha^2} J_{z(máx)} e^{-\beta y} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \gamma y\right)} \quad (54)$$

A parte real de (54) pode ser obtida usando-se as equações (35) e (36) e a propriedade trigonométrica do seno ($\phi_a + \phi_b$), sendo $\phi_a = \phi$ e $\phi_b = \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \gamma y\right)$. Assim:

$$H'_x = \frac{J_{z(máx)}}{2\alpha^2} e^{-\beta y} \cdot R \cdot \text{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \gamma y + \phi \right) \quad (55)$$

E diferenciando-se (51) em relação à x , obtém-se:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-j2\pi}{\lambda} \rho J_{z(máx)} e^{-(\beta + j\gamma)y} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (56)$$

Igualando-se (56) a (50), obtém-se a intensidade do campo magnético ao longo do eixo y :

$$H_y = \frac{-2\pi}{\lambda \cdot \omega \cdot \mu} \rho J_{z(máx)} e^{-(\beta + j\gamma)y} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)} \quad (57)$$

Aplicando-se (21) em (57):

$$H_y = \frac{-\pi}{\lambda \cdot \alpha^2} \cdot J_{z(máx)} \cdot e^{-\beta y} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \gamma y\right)} \quad (58)$$

Tomando-se a parte real de (58):

$$H'_y = \frac{-\pi}{\lambda \cdot \alpha^2} \cdot J_{z(máx)} \cdot e^{-\beta y} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \gamma y \right) \quad (59)$$

Novamente, considerando-se $\sqrt{2} \alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda}$, $R = \alpha\sqrt{2}$, $\beta = \gamma = \alpha$, a equação (55) de H'_x é simplificada para:

$$H'_x = \frac{J_{z(máx)}}{\sqrt{2} \cdot \alpha} \cdot e^{-\alpha y} \text{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \alpha y + \frac{\pi}{4} \right) \quad (60)$$

A componente H'_x pode ser simplificada sabendo-se que $\text{sen} \left(\phi_b + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(-\phi_b + \frac{\pi}{4} \right)$:

$$H'_x = \frac{J_{z(máx)}}{\sqrt{2} \cdot \alpha} \cdot e^{-\alpha y} \cos \left(-\phi_b + \frac{\pi}{4} \right) \quad (61)$$

A equação (38-a) da densidade de corrente na direção z pode ser escrita como:

$$J_z = J_{z(máx)} \cdot e^{-\alpha \cdot y} \cdot \cos(\phi_b) \quad (62)$$

E sabendo-se que a função cosseno é par, ou seja, $\cos(\phi_b) = \cos(-\phi_b)$, então comparando-se (61) e (62), obtém-se:

$$H'_x = \frac{J_z}{\sqrt{2} \cdot \alpha} \cdot \frac{\pi}{4} \quad (63)$$

E, novamente, considerando-se $\sqrt{2} \alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda}$, $\beta = \gamma = \alpha$, e aplicando-se a equação (38-a) na equação (59), H'_y pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$H'_y = \frac{-\pi}{\lambda \cdot \alpha^2} \cdot J_z \quad (64)$$

Por fim, dividindo-se o módulo de H'_x por H'_y e sabendo-se que $\alpha \gg \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}$, obtém-se que $|H'_x| \gg |H'_y|$ e, desta forma, a componente resultante do campo H , ou seja H_{total} , é apenas na direção x ($H_{total} = H'_x$). Então

$$H_{total} = H'_x = \frac{J_{z(máx)}}{\sqrt{2} \cdot \alpha} \cdot e^{-\alpha} \cdot \text{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \alpha \cdot y + \frac{\pi}{4} \right) \quad (65)$$

Portanto, a partir das equações (63) e (64), conclui-se que:

- H'_x está adiantado de J_z de 45° ;
- Considerando-se $\alpha \gg \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}$, H'_x poderá ser considerado a intensidade do campo magnético resultante;
- H'_y está 180° fora de fase em relação à J_z .

C. Determinação da indução magnética no entreferro

Admitindo-se, no entreferro, um fluxo magnético apenas associado com a componente de campo H'_y , e aplicando-se a equação (64) em (3), então:

$$B_y = \frac{-\mu \cdot \pi}{\lambda \cdot \alpha^2} \cdot J_z \quad (66)$$

Substituindo-se (21) em (66):

$$B_y = \frac{-2 \cdot \pi \cdot \rho}{\lambda \cdot \omega} \cdot J_z \quad (67)$$

De forma análoga a H'_y , B_y também está defasado de 180° de J_z .

A equação (67) é válida para valores de y no interior da região ativa e também na superfície desta região, que faz

fronteira com o entreferro. Assim, aplicando-se a equação (38-a), para $y=0$, na equação (67), então:

$$B_y = -\frac{2\pi\rho}{\lambda\omega} \cdot J_{z(máx)} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \quad (68)$$

A partir de (68), determina-se o valor médio de B_y para meio período, na superfície da região ativa:

$$B_{y(méd)} = \frac{2}{T} \cdot \int_{-T/4}^{T/4} \frac{2\pi\rho}{\lambda\omega} \cdot J_{z(máx)} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) dt \quad (69)$$

Assim, obtém-se a equação da indução magnética média na direção y , na região de fronteira entre a região ativa e o entreferro, em $y = 0$:

$$B_{y(méd)} = \frac{4\rho}{\lambda\omega} \cdot J_{z(máx)} \quad (70)$$

D. Cálculo do fluxo magnético por polo

Considerando-se a área de um polo, onde a largura é $\lambda/2$ e o seu comprimento é L , conforme apresentado na Figura 5, pode-se determinar o fluxo magnético ϕ_{ac} , por polo, no entreferro.

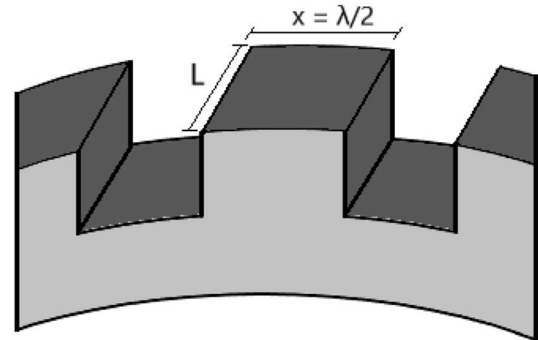


Fig. 5. Geometria dos polos magnéticos. Próprio autor

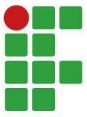
$$\phi_{ac} = B_{y(méd)} \cdot S_{polo} \quad (71)$$

$$S_{polo} = \frac{L \cdot \lambda}{2} \quad (72)$$

, sendo S_{polo} a área do polo [m²].

Então, aplicando-se as equações (70) e (72) em (71), obtém-se o fluxo magnético por polo:

$$\phi_{ac} = \frac{2\rho L}{\omega} \cdot J_{z(máx)} \quad (73)$$



E. Cálculo da potência dissipada na região ativa por unidade de área

Para o projeto de freios de Foucault, as perdas relacionadas ao atrito (perdas mecânicas) são desprezadas, uma vez que as perdas de maior interesse ocorrem na região ativa associadas às correntes de Foucault. O fluxo magnético por polo exigido para determinado ponto de operação é então calculado em função das perdas por efeito Joule decorrentes dessas correntes induzidas.

Para o cálculo da potência dissipada S_{av} na região ativa, por unidade de área, em um período, utiliza-se a expressão da parte real do *vetor de Poynting complexo*.

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{\infty} \int_{y=0}^T \rho J_z^2 dy dt \quad (74)$$

E aplicando-se (38-a) em (74), então:

$$S_{av} = \frac{\rho J_z^2(máx)}{4\alpha} \quad (75)$$

Toda análise e equacionamento matemático apresentados até o momento se baseiam no fato de μ_r ser constante. Porém, a região ativa, sendo composta de material ferromagnético, terá sua permeabilidade magnética variando em função das variações ocorridas nos campos B e H .

Segundo [6], para o caso de uma região ativa ferromagnética, pode-se considerar $\alpha\sqrt{2} \gg \frac{2\pi}{\lambda}$ e $H'_x \gg H'_y$. Assim, a profundidade de penetração tende a ser pequena, e com isto, o fluxo magnético ao atravessar de polo a polo adjacente, estará confinado a uma seção transversal pequena, próxima à superfície da região ativa. Deste modo, usando a equação (65) para $y = 0$:

$$H_{máx} = \frac{J_z(máx)}{\alpha\sqrt{2}} \quad (76)$$

Substituindo-se (76) e (21) em (75):

$$S_{av} = \frac{\rho H_{máx}^2}{2} \cdot \left(\frac{\mu\omega}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (77)$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os lados da equação (77):

$$H_{máx} \cdot \mu^{1/4} = \left(\frac{8 \cdot S_{av}^2}{\omega\rho}\right)^{1/4} \quad (78)$$

Substituindo-se (76) em (73):

$$\phi_{ac} = \frac{2\rho L H_{máx} \alpha \sqrt{2}}{\omega} \quad (79)$$

A partir de (77):

$$\frac{2S_{av}}{H_{máx}\rho} = H_{máx}\alpha \quad (80)$$

Por fim, substituindo-se (80) em (79), obtém-se:

$$\phi_{ac} = \frac{S_{av} 4\sqrt{2}L}{\omega H_{máx}} \quad (81)$$

Para um dado ponto de operação de torque (T) e rotação (n) da máquina rotativa a ser freada, admitindo-se que as grandezas L , ω e $H_{máx}$ da equação (81) são conhecidas, isto possibilita calcular o valor do fluxo por polo ϕ_{ac} necessário para produzir uma determinada potência de perdas S_{av} .

F. Estudo da não linearidade da região ativa

Sabe-se que materiais ferromagnéticos apresentam saturação magnética e que esses materiais podem ser utilizados na construção da região ativa do freio. Porém, todas as equações apresentadas anteriormente desconsideraram esse fenômeno, uma vez que foram baseadas, inicialmente, na equação (9) da difusão de corrente em meio linear. De acordo com [6] e [8], esse problema pode ser contornado utilizando-se uma aproximação exponencial para a curva de magnetização $B \times H$, na porção desta curva em que se deseja operar o freio de Foucault.

Assim, considere:

$$B = a \cdot H^b \quad (82)$$

, sendo a um coeficiente que ajusta a escala da relação entre B e H e o expoente b define a não linearidade da curva de magnetização. Sabendo-se que $B = \mu \cdot H$ e substituindo-se esta equação no lado esquerdo de (82), então:

$$\mu \cdot H = aH^b \quad (83)$$

Elevando-se a $\frac{1}{4}$ ambos os lados da equação (83), obtém-se:

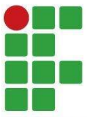
$$\mu^{\frac{1}{4}} \cdot H = cH^m \quad (84)$$

, sendo

$$c = a^{1/4} \quad (85-a)$$

e

$$m = (b + 3)/4 \quad (85-b)$$



É possível determinar os parâmetros c e m tomando-se um material ferromagnético para estudos. No trabalho realizado por [8], considerou-se o aço 1020, cujo material é usado em freios magnéticos.

Aplicando-se propriedades de logaritmos na equação (84), então:

$$\frac{1}{4} \log \mu = \log c + (m - 1) \log H \quad (86)$$

A partir da curva $B \times H$ do aço 1020 apresentada em [8], foram tomados dois pontos (B_1, H_1) e (B_2, H_2) acima do joelho da curva de magnetização, que corresponde à região desta curva onde operam, geralmente, os freios baseados em correntes de Foucault:

$$B_1 = 1,875 \text{ [T]}; H_1 = 10000 \text{ [A/m]} \\ B_2 = 2,025 \text{ [T]}; H_2 = 30000 \text{ [A/m]}$$

As permeabilidades magnéticas μ_1 e μ_2 são determinadas a partir das razões $\frac{B_1}{H_1}$ e $\frac{B_2}{H_2}$. E aplicando-se μ_1, μ_2, H_1 e H_2 em (86), obtém-se 2 equações com 2 incógnitas (m e c). O expoente m pode então ser determinado usando a expressão:

$$m = \frac{\frac{1}{4} \log \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)}{\log \left(\frac{H_1}{H_2} \right)} + 1 \quad (87)$$

A partir dos valores numéricos de μ_1, μ_2, H_1 e H_2 substituídos em (87), obtém-se $m = 0,77$.

E substituindo-se os valores numéricos de μ_1, H_1 e m em (84), determina-se o parâmetro $c = 0,97$.

Assim, a equação (84) pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\mu^{\frac{1}{4}} H = 0,97 H^{0,77} \quad (88)$$

Por fim, substituindo-se os valores numéricos de m e c nas equações (85-a) e (85-b), obtém-se os parâmetros $a = 0,8853$ e $b = 0,08$ que permitem traçar a *curva aproximada de magnetização* do aço 1020:

$$B = 0,8853 H^{0,08} \quad (89)$$

G. Expressão geral de ϕ_{ac}

Para se determinar uma expressão geral para o fluxo magnético por polo, que leve em conta a não linearidade da curva de magnetização e o ponto de operação de torque e de rotação, deve-se primeiro determinar uma expressão de $H_{m\acute{a}x}$ substituído-se (88) em (78):

$$H_{m\acute{a}x} \approx K_1 \left(\frac{8 \cdot S_{av}^2}{\omega \rho} \right)^{0,325} \quad (90)$$

E substituindo-se (90) em (81), então:

$$\phi_{ac} = \frac{K_2 L S_{av}^{0,35} \rho^{0,325}}{\omega^{0,675}} \quad (91)$$

A densidade de potência mecânica no freio é dada por:

$$S_{mec} = \frac{P_{mec}}{S_{ativa}} \quad (92)$$

S_{mec} : Densidade de potência mecânica no freio [W/m²]
 P_{mec} : Potência mecânica [W]
 S_{ativa} : Área da superfície da região ativa em $y=0$ [m²].

A potência mecânica relaciona-se com o torque e a rotação a partir da equação (93).

$$P_{mec} = T \omega \quad (93)$$

, sendo T o torque desenvolvido [N.m].

Ajustando-se a equação (12) da frequência angular e relacionando-a com o número de polos e a rotação, então

$$\omega = \pi p' n \quad (94)$$

, sendo p' a quantidade de polos.

Para a obtenção da área da superfície ativa, considere

$$S_{ativa} = \pi D L \quad (95)$$

, sendo D o diâmetro da região ativa em $y = 0$ [m].

Substituindo-se (93), (94) e (95) em (92), obtém-se

$$S'_{mec} = \frac{n T}{D L} \quad (96)$$

, sendo $S'_{mec} = S_{mec}/p'$ a densidade de potência mecânica por polo [W/ (m². polo)].

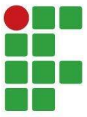
Para que o freio atue, $S_{av} = S'_{mec}$. Além disso, aplicando-se (96) em (91), então

$$\phi_{ac} = \frac{K_3 \rho^{0,325} L^{0,65} T^{0,35}}{D^{0,35} p^{0,675} n^{0,325}} \quad (97)$$

Considere ainda:

$$M = \frac{\rho^{0,325} L^{0,65}}{D^{0,35} p^{0,675}} \quad (98)$$

M é um parâmetro constante, a uma dada temperatura, para uma máquina rotativa sob estudo.



Assim, o fluxo magnético por polo necessário para frear uma máquina rotativa em um dado ponto de operação de torque T e velocidade n é dado por:

$$\phi_{ac} = K_3 M \frac{T^{0,35}}{n^{0,325}} \quad (99)$$

É importante destacar que K_1 , K_2 e K_3 são constantes que podem ser determinadas, com maior precisão, por meio de simulações eletromagnéticas.

IV. ESTUDO DA REAÇÃO DE ARMADURA

Com as bobinas de excitação do freio energizadas e sem o rotor girar, a distribuição de indução magnética ao longo do entreferro é aproximadamente retangular, em função da saturação magnética. Ao girar o rotor, correntes são induzidas em sua região ativa, criando um campo magnético adicional (conhecido como *reação de armadura*). O padrão de distribuição das induções magnéticas resultante no entreferro é uma combinação da distribuição estática de indução devido à excitação inicial e a reação de armadura que surge com o rotor em movimento. A expressão matemática da *força magnetomotriz* de reação de armadura F_R será desenvolvida por meio do cálculo da integral da distribuição de densidades de correntes e de manipulações algébricas apropriadas.

A partir de (8), a densidade de corrente J_z é dado por:

$$J_z = \frac{\partial H'_y}{\partial x} - \frac{\partial H'_x}{\partial y} \quad (100)$$

Derivando-se a equação (59) e, novamente, levando-se em conta que $\alpha \gg \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda}$, verifica-se que a equação (100) pode ser aproximada para a condição de que a derivada parcial de H'_y em relação a x é praticamente nula. Assim, a equação (100) é aproximada para

$$J_z \cong -\frac{\partial H'_x}{\partial y} \quad (101)$$

e

$$H'_x = -\int_{y=0}^{\infty} J_z dy \quad (102)$$

Como H'_x já foi determinado na equação (60) para qualquer valor de y , então:

$$H''_x = \frac{J_z(máx)}{\sqrt{2}\alpha} \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (103)$$

, sendo $H''_x = H'_x$ em $y=0$.

A. Reação de armadura F_R

E, novamente, supondo-se $\sqrt{2}\alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda}$ e $H_x \gg H_y$ na região ativa, então H''_x será a componente do campo H responsável pela reação de armadura. Dessa forma:

$$F_R = \int H''_x dx = \int \left(\frac{J_z(máx)}{\sqrt{2}\alpha} \text{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \right) dx \quad (104)$$

Resolvendo-se (104), então:

$$F_R = \frac{\lambda J_z(máx)}{2\sqrt{2}\alpha\pi} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (105)$$

Comparando-se, em $y = 0$, o fasor F_R da equação (105) e J_z da equação (27-a), verifica-se que o fasor F_R está adiantado 45° em relação ao fasor J_z .

O módulo da reação de armadura é dado por:

$$F_{R(máx)} = \frac{\lambda J_z(máx)}{2\sqrt{2}\alpha\pi} \quad (106)$$

Aplicando-se (76) em (106), então:

$$F_{R(máx)} = \frac{\lambda H_{máx}}{2\pi} \quad (107)$$

Substituindo-se (81) em (107):

$$F_{R(máx)} = \frac{2\sqrt{2}\lambda L S_{av}}{\pi\omega\phi_{ac}} \quad (108)$$

Considere, novamente, a Figura 5 da seção transversal onde se origina um polo magnético

$$P''_{mec} = S_{av}L\lambda \quad (109)$$

, sendo P''_{mec} a potência por par de polos [W/polo], ou seja, $P''_{mec} = P_{mec}/p$.

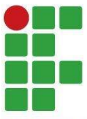
Substituindo-se (12) em (93) para $p = 1$:

$$P''_{mec} = T''2\pi n \quad (110)$$

, sendo $T'' = T/p$, o torque por par de polos [N.m/polo].

Aplicando-se (12), (109) e (110) em (108), então:

$$F_{R(máx)} = \frac{2\sqrt{2}T}{\pi\phi_{ac}p^2} \quad (111)$$



Então, substituindo-se (99) em (111), para o caso de uma região ativa ferromagnética de aço 1020, obtém-se a reação de armadura:

$$F_{R(máx)} = \frac{K_4 T^{0,65} n^{0,325}}{M p^2} \quad (112)$$

, sendo K_4 uma constante que pode ser determinada, com maior precisão, por meio de simulações eletromagnéticas.

B. Expressão da distribuição das induções $B_{estatic}$

De acordo com [8], a indução magnética resultante B_{ac} , no entreferro, com a região ativa em movimento, pode ser determinada pela seguinte soma fasorial:

$$B_{ac} = B_{static} + B_r \quad (113)$$

, sendo B_{static} a indução magnética para velocidade nula e B_r a indução magnética associada ao surgimento da reação de armadura com a região ativa em movimento.

Comparando-se a equação (105) da reação da armadura F_R com a equação (68) do campo indução magnética B_y , que por sua vez, está associado com o fluxo magnético ϕ_{ac} , conclui-se que os fasores F_R e B_r estão 135° atrasados de B_y e B_{ac} . Então:

$$B_{ac} \angle 0^\circ = B_{static} \angle \theta + B_r \angle -135^\circ \quad (114)$$

$$B_{static} \angle \theta = B_{ac} \angle 0^\circ + B_r \angle 45^\circ \quad (115)$$

Desprezando-se as relutâncias nas peças ferromagnéticas, tem-se que:

$$B_{ac} = \frac{\phi_{ac}}{S_{polo}} \quad (116)$$

$$B_r = \frac{F_{R(máx)}}{S_{polo} R'_g} \quad (117)$$

, sendo R'_g a relutância do entreferro [A/Wb].

Substituindo-se (99) em (116) e, posteriormente, (112) em (117), obtém-se:

$$B_{ac} = \frac{K_3 M T^{0,35}}{S_{polo} n^{0,325}} \quad (118)$$

$$B_r = \frac{K_4 T^{0,65} n^{0,325}}{S_{polo} R'_g M p^2} \quad (119)$$

E, por fim, substituindo-se (118) e (119) em (115) obtém-se:

$$B_{static} \angle \theta = \frac{K_3 M T^{0,35}}{S_{polo} n^{0,325}} + \frac{K_4 T^{0,65} n^{0,325}}{S_{polo} R'_g M p^2} \angle 45^\circ \quad (120)$$

Para calcular o valor de $B_{estatic}$ em diferentes condições de torque T e rotação n do freio, pode-se utilizar a equação (120). A partir desse valor, é possível determinar a corrente de excitação necessária para cada ponto de operação (T, n).

V. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para uma melhor visualização e validação dos resultados obtidos, a partir das equações apresentadas, foram elaborados gráficos do freio de Foucault em discussão.

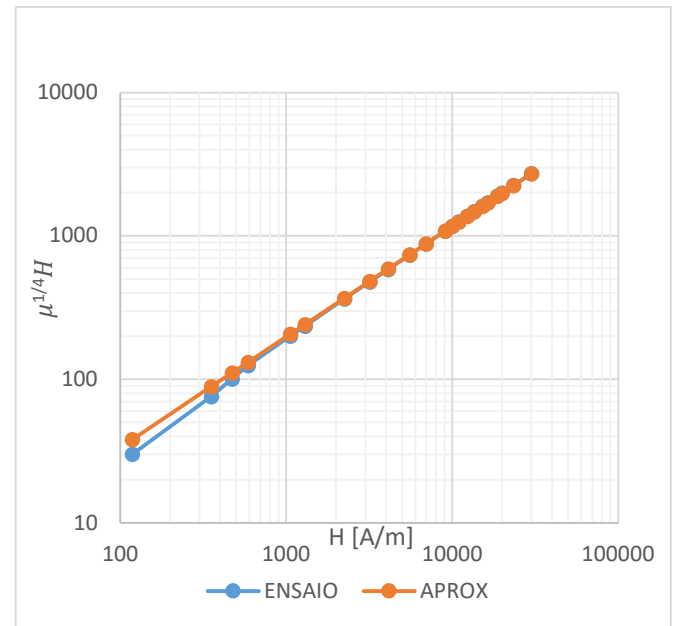


Fig. 6. Curvas *Ensaio* e *Aproximação* para o aço 1020, a partir da equação (88). Próprio autor.

A Figura 6 apresenta duas curvas traçadas (*ENSAIO* e *APROX*) a partir de valores de campo magnetizante H e de permeabilidade magnética μ , para o ensaio do aço 1020 realizado por [8] e cujos valores foram inseridos na equação (88). A curva *ENSAIO* é obtida a partir de dados (μ, H) substituídos no lado esquerdo da equação (88) e a curva *APROX* é obtida apenas a partir de dados de H substituídos no lado direito desta mesma equação. Comparando-se essas duas curvas, observa-se que para valores de campo magnetizante H superiores a 1000 A/m, que corresponde à região acima do joelho da curva de magnetização, os resultados apresentados no eixo vertical são muito próximos, sendo tais valores de H geralmente aplicáveis em projetos de freios por correntes de

Foucault, de acordo com [8]. Portanto, isto evidencia que a aproximação apresentada no lado direito da equação (88) é precisa para a região prática de interesse em projetos de freios por correntes de Foucault. Os dados utilizados para o gráfico da Figura 6 são apresentados no Apêndice A.

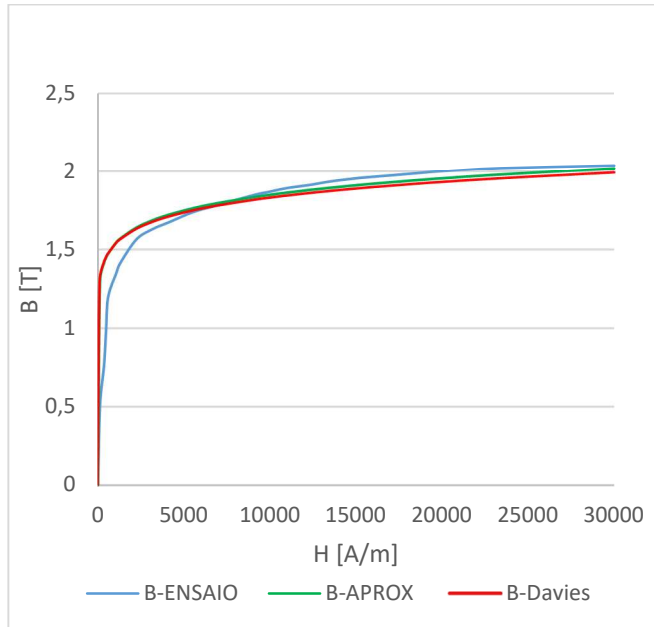


Fig. 7. Curvas de magnetização do aço 1020. Próprio autor.

A Figura 7 apresenta um comparativo entre três curvas de magnetização ($B \times H$) para aço 1020. A curva *B-ENSAIO* foi obtida através de um ensaio e é apresentada em [8]. A curva *B-Davies* foi obtida a partir de [6] para $a = 0,9$ e $b = 0,077$ aplicado na equação (82). Já a curva *B-APROX* foi delineada pela equação (89) e mostra concordância com as demais curvas apresentadas em [6] e [8], principalmente na região de maior interesse, que corresponde à região acima do joelho da curva de magnetização. As três curvas supracitadas foram traçadas de acordo com os valores apresentados no Apêndice B.

Destaca-se ainda que as equações (99) e (112) fornecem, respectivamente, os valores do fluxo magnético ϕ_{ac} e da reação de armadura $F_{R(máx)}$ para um dado ponto de operação (T, n) da máquina rotativa. E a equação (111) revela que a reação de armadura e o fluxo magnético que a produz (ϕ_{ac}) são grandezas inversamente proporcionais e ambas dependem da velocidade (n). Assim, um aumento da reação de armadura acarreta na redução do fluxo por polo ϕ_{ac} e ambos ocorrem se houver um aumento na velocidade n .

O comportamento de um freio é descrito por suas curvas de torque em função da rotação parametrizadas pela corrente de excitação. Utilizando-se a equação (120) é possível gerar uma superfície tridimensional que relaciona cada ponto de operação (Torque, Rotação) com o valor necessário de B_{static} .

Para a plotagem do gráfico 3D (B_{static} , Torque, Rotação), exposto na Figura 8, foram utilizados os dados apresentados na Tabela 1 que, por sua vez, foram inseridos no algoritmo elaborado em MATLAB apresentado no Apêndice C.

Ao traçar curvas de nível a partir deste gráfico 3D, obtêm-se as curvas 2D de torque em função da rotação para cada

valor constante de B_{static} . Com um anteprojeto do circuito magnético do freio, pode-se realizar o processo inverso, ou seja, calcular B_{static} para diferentes correntes de excitação e, assim, extrair as curvas de torque *versus* rotação correspondentes.

TABELA 1: Dados para plotagem do gráfico 3D (B_{static} , Torque, Rotação)

K_3	1
K_4	0,5
p	8
R'_g	2.10^5 A/Wb
M	$7,5.10^{-4}$
S_{polo}	10^{-2} m ²
Torque	10 a 1200 N.m
Rotação	10 a 1240 rpm

Fonte: Adaptado de [8].

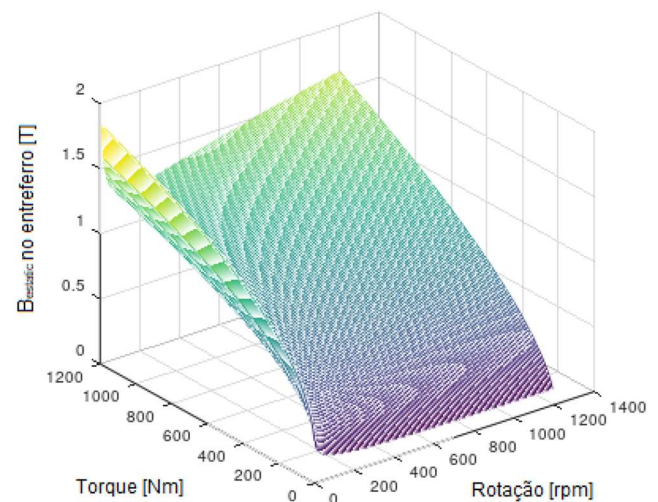


Fig. 8. Gráfico 3D (B_{static} , Torque, Rotação) para os dados da Tabela 1. Próprio autor.

As curvas de nível (Torque, Rotação) para diversos valores de B_{static} constante estão representadas na Figura 9. Essas curvas também são obtidas a partir dos dados da Tabela 1. Para cada valor de B_{static} constante está associada uma corrente de excitação constante. Portanto, é possível ajustar a corrente de excitação que resulte num dado valor de B_{static} necessário para frear a máquina rotativa para um dado ponto de operação (T, n) .

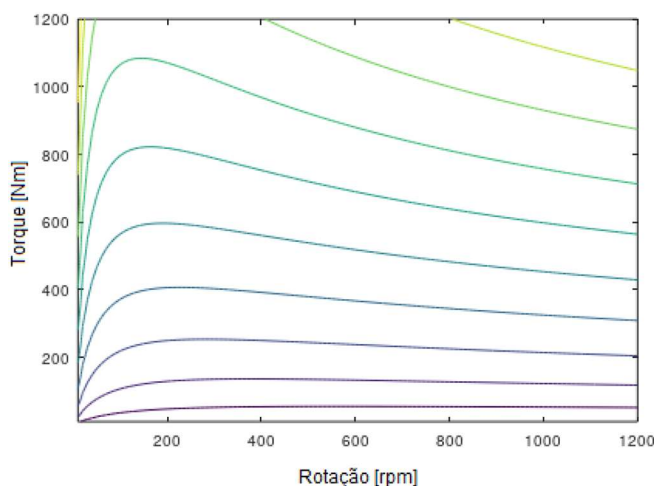


Fig. 9. Curvas (Torque x Rotação) para valores de B_{static} constante. Próprio autor.

Embora, neste artigo, não se tenham feito simulações eletromagnéticas, como um complemento aos resultados obtidos, são apresentados no Anexo A imagens extraídas de [8], que exibem o quanto varia a profundidade de penetração conforme a mudança de rotação e da corrente de excitação do freio por correntes de Foucault. E no Anexo B são expostos gráficos, também extraídos de [8], que ilustram a forma de onda da indução magnética com o rotor estático, além da indução resultante (B_{ac}) e da indução de reação de armadura (B_r) para diferentes valores de rotação, com o rotor em movimento.

Quanto ao Anexo A, ao comparar diferentes valores de rotação para uma mesma corrente de excitação, observou-se que a profundidade de penetração diminui com o aumento da rotação. Além disso, para uma mesma rotação, a profundidade de penetração aumenta ao se elevar a corrente de excitação.

No Anexo B é possível observar que o ângulo θ médio entre B_{static} e B_{ac} é relativamente pequeno mesmo em rotações próximas de 1000 rpm e que a amplitude média de B_{ac} , assim como o fluxo magnético ϕ_{ac} , tende a reduzir à medida que cresce a rotação do eixo, conforme previsto na equação (118). Por outro lado, é possível observar que o ângulo médio entre B_{static} e B_r é proximamente 45° e que a amplitude de B_r tende a aumentar à medida que cresce a rotação do eixo, conforme previsto na equação (119).

Por fim, percebe-se também, nos gráficos exibidos no Anexo B que, com o aumento da rotação, ocorre uma progressiva distorção na forma de onda das induções magnéticas, evidenciando que uma estimativa correta da reação de armadura é primordial para prever o comportamento adequado do freio.

VI. CONCLUSÕES

Na elaboração deste trabalho, baseado inicialmente nas equações de Maxwell, buscou-se demonstrar soluções analíticas e experimentais de forma que o leitor, seguindo um passo a passo, consiga compreender os cálculos necessários para a elaboração do projeto de um freio por correntes de

Foucault. Além disso, foram apresentadas ilustrações gráficas para uma melhor visualização dos resultados.

Enfatizou-se a importância do motor de indução na indústria, bem como as vantagens e principais aplicações do freio de Foucault, que se revela uma solução vantajosa em diversas aplicações.

O equacionamento iniciou-se com o objetivo de demonstrar a equação da densidade de corrente \vec{J} em um meio condutor, para posterior relação com torque, velocidade e número de polos. Considerando-se que as correntes de Foucault ocorrem apenas na direção axial, a equação de J_z foi deduzida. Além disso, foram deduzidas também as equações da intensidade de campo magnético na região ativa, fluxo magnético por polo, indução magnética no entreferro e potência dissipada na região ativa, levando-se em conta as dimensões da área do polo para o tipo de freio sob estudos.

No estudo da não linearidade da região ativa, considerou-se a saturação magnética, bem como a variação da permeabilidade magnética para o caso prático do aço 1020, obtendo-se uma curva de magnetização B versus H que é coerente com dados de ensaios realizados por [8].

Em seguida, estudou-se a reação de armadura, fundamental para o entendimento da interação entre campos magnéticos presentes no entreferro e na superfície da região ativa, em função da resistência ao movimento provocado pelas correntes de Foucault. A expressão matemática da indução magnética resultante no entreferro (B_{ac}) foi apresentada, cuja equação é essencial para determinar a indução estática (B_{static}) e, por consequência, a corrente de excitação necessários para ajustar o sistema de frenagem para um dado ponto de operação de torque e rotação do eixo da máquina rotativa.

A seção de resultados e discussões foi dedicada, sobretudo a exposição de gráficos, demonstrando a compatibilidade entre os resultados obtidos e as curvas traçadas a partir de dados de ensaios e cálculos apresentados pelos autores [6] e [8], além de evidenciar coerência com o equacionamento apresentado neste artigo. Além disso, também foram adicionadas imagens obtidas a partir de simulações eletromagnéticas coletadas de [8] que exibem como a indução magnética se comporta nos materiais que compõem o freio e relacionando-a com grandezas como torque e rotação.

Como proposta de continuidade deste trabalho, sugere-se a elaboração de simulações eletromagnéticas utilizando o software *Finite Element Method Magnetics* (FEMM) visando estudar o comportamento da distribuição das induções magnéticas em função da variação de parâmetros tais como a geometria e a área do polo, dimensão do entreferro e tipos de materiais usados para a região ativa.

E, por fim, sugere-se também uma análise da variação da temperatura da região ativa à medida que varia a reação de armadura, pois isto causa uma variação da resistividade do material que compõe a região ativa, o que afeta, sobretudo a profundidade de penetração das induções das correntes de Foucault. Esta variação da temperatura também provoca mudanças na dimensão do entreferro, devido à dilatação térmica, resultando em variações no fluxo magnético por polo e no torque desenvolvido no eixo que, por sua vez, poderão modificar o ponto de operação (T, n) do sistema de frenagem.

REFERÊNCIAS

- [1] SILVEIRA, Fernando Lang da. “Motor elétrico de indução: uma das dez maiores invenções de todos os tempos”. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. Florianópolis. Vol. 29, no. 1 (abr. 2012), p. 114-129, 2012.
- [2] MICCO, Felipe Kern. Avaliação de metodologia para o dimensionamento de um freio de Foucault. 2015.
- [3] YING, Zhi-ding; XU, Xin-fu; ZHU, Jian-an. Analysis of simulation design of the disc eddy current braking device. In: *2010 International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering*. IEEE, 2010. p. 309-311.
- [4] BRANDÃO, Liélío Bezerra. Desenvolvimento de um sistema de controle conjugado resistente num dinamômetro de Foucault. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.
- [5] FONTANA, Carlos Henrique. Protótipo de um freio eletromagnético por correntes de Foucault. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- [6] DAVIES, E. J., "An Experimental and Theoretical Study of Eddy-Current Couplings and Brakes," in *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 82, no. 67, pp. 401-419, Aug. 1963.
- [7] DE ANDRADE, Alexandre Acácio et al. Elaboração de bancadas didáticas para automação industrial baseadas em CLPs e freios de Foucault. *Revista de Ensino de Engenharia*, v. 35, n. 2, 2017.
- [8] DIETRICH, A. Batista. Um estudo de correntes induzidas em meios maciços ferromagnéticos - Aplicação no projeto de freios de correntes parasitas. 2000. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo.
- [9] MALANGE, Francisco Carlos V.; SEIXAS, Falcondes José M.; OLIVEIRA, Priscila da S. Projeto de um módulo didático de um freio eletromagnético para ensaios de motores elétricos. In: *Congresso Mundial de Engenharia de Sistemas e Tecnologia da Informação-WCSEIT 2013*.
- [10] DIETRICH, A. Batista; CHABU, I. Eduardo; CARDOSO, J. R., "Eddy-current brake analysis using analytic and FEM calculations. I. Theory," *IEMDC 2001. IEEE International Electric Machines and Drives Conference (Cat. No.01EX485)*, Cambridge, MA, USA, 2001, pp. 454-457,

APÊNDICE A

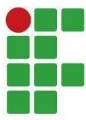
Dados utilizados para gerar o gráfico da Figura 6 para o aço 1020

<i>H</i>	μ	ENSAIO	APROX
117,75	0,004246	30,05851567	38,14271821
353,25	0,002154	76,10155378	88,87814987
471	0,002077	100,5503748	110,916928
588,75	0,002031	124,9838065	131,7099372
1059,75	0,001272	200,1314658	207,0991764
1295,25	0,001091	235,4010658	241,7040942
2237,25	0,0007	363,8596493	368,1729795
3179,25	0,000513	478,4358458	482,5715759
4121,25	0,000406	585,0719622	589,3103024
5534,25	0,000314	736,8540281	739,4809493
6947,25	0,000257	879,2817184	880,9833252
9066,75	0,000204	1083,323956	1081,457602
10008,75	0,000187	1170,103771	1166,982147
10950,75	0,000173	1255,386911	1250,672239
12363,75	0,000155	1378,949031	1373,17978
13541,25	0,000143	1480,493325	1472,817638
15189,75	0,000129	1618,223418	1609,035835
16367,25	0,00012	1713,794784	1704,248952
18722,25	0,000106	1900,809914	1890,111503
19899,75	0,000101	1992,496454	1980,999664
23432,25	8,63E-05	2258,375305	2246,614245
30026,25	6,78E-05	2725,057088	2719,24024

APÊNDICE B

Dados utilizados para gerar o gráfico da Figura 7 para o aço 1020

H	B-ENSAIO	B-APROX	B-Davies
0	0	0	0
117,75	0,50002	1,296045188	1,299291209
353,25	0,7609	1,415108841	1,413985111
471	0,9783	1,448054619	1,44565652
588,75	1,1957	1,474136652	1,470710491
1059,75	1,34788	1,545110503	1,538803527
1295,25	1,4131	1,570115348	1,562765218
2237,25	1,56528	1,640289225	1,629935907
3179,25	1,6305	1,687055015	1,67464019
4121,25	1,67398	1,72244589	1,708440033
5534,25	1,7392	1,763550793	1,747664381
6947,25	1,78268	1,79592545	1,778533725
9066,75	1,8479	1,834591605	1,81537473
10008,75	1,86964	1,849156456	1,829244497
10950,75	1,89138	1,862510715	1,841957846
12363,75	1,91312	1,880681653	1,859251224
13541,25	1,93486	1,894418696	1,872320678
15189,75	1,9566	1,911909454	1,888956286
16367,25	1,96747	1,923363313	1,899847053
18722,25	1,98921	1,944159599	1,919614751
19899,75	2,00008	1,953669427	1,928651575
23432,25	2,02182	1,97937641	1,953071699
30026,25	2,037038	2,019032726	1,990719607



APÊNDICE C

Programação em MATLAB utilizada para gerar os gráficos das Figuras 8 e 9

```
% DETERMINAÇÃO DA INDUÇÃO MAGNÉTICA ESTÁTICA (Bestat)
% Autores: Alex Souza Waltrick e Denivaldo Pereira da Silva (junho 2024)
%
% Bac - indução magnética resultante (região ativa em movimento)
% Br - indução magnética associada à reação de armadura Fr
% com a região ativa em movimento.
% Bestat - indução magnética com a região ativa estática (módulo)
% Best - indução magnética com a região ativa estática (valor complexo)
%
kfi=1; % constante adimensional do Bac
kr=0.5; % constante adimensional do Br
M=7.5e-4; % constante associada a parâmetros geométricos da máquina rotativa
%, do número de pares de polos e da resistividade elétrica
Spolo=1e-2; % área do polo magnético
Rg=2e+5; % relutância do entreferro
p=8; % número de pares de polos
% n - rotações por segundo
% T - torque em Newton.metro
N=120; % número de amostras de dados para formação das matrizes (n) e (T)
% via função "meshgrid"
%
[n, T]= meshgrid(0.1667:0.1667:20.1667, 10:10:1200);

Thetal=45; % fase (ângulo em graus) da indução magnética Br

Thetal1=Thetal*pi/180;% fase (ângulo em radiano) da indução magnética Br

Ar=1; % amplitude

arl=Ar*cos(Thetal1); % parte real

brl=Ar*sin(Thetal1); % parte imaginária

zr=arl + (brl*i); % constante complexa de Br

Best=(kfi*(M*(T.^0.35))./(Spolo*(n.^0.325)))+((kr*zr)*((n.^0.325).*(T.^0.65))/(Rg*Spolo*M*(p.^2)));

Bestat=abs(Best);

subplot (2,2,1)

% A função abaixo gera a curva 3D (rotação, torque, indução magnética)
% rotação já convertida para r.p.m

mesh(60*n,T,Bestat);

title('Grafico 3D módulo da indução estática - Bestat')
colorbar % a cor indica o valor no eixo Z

subplot (2,2,2)

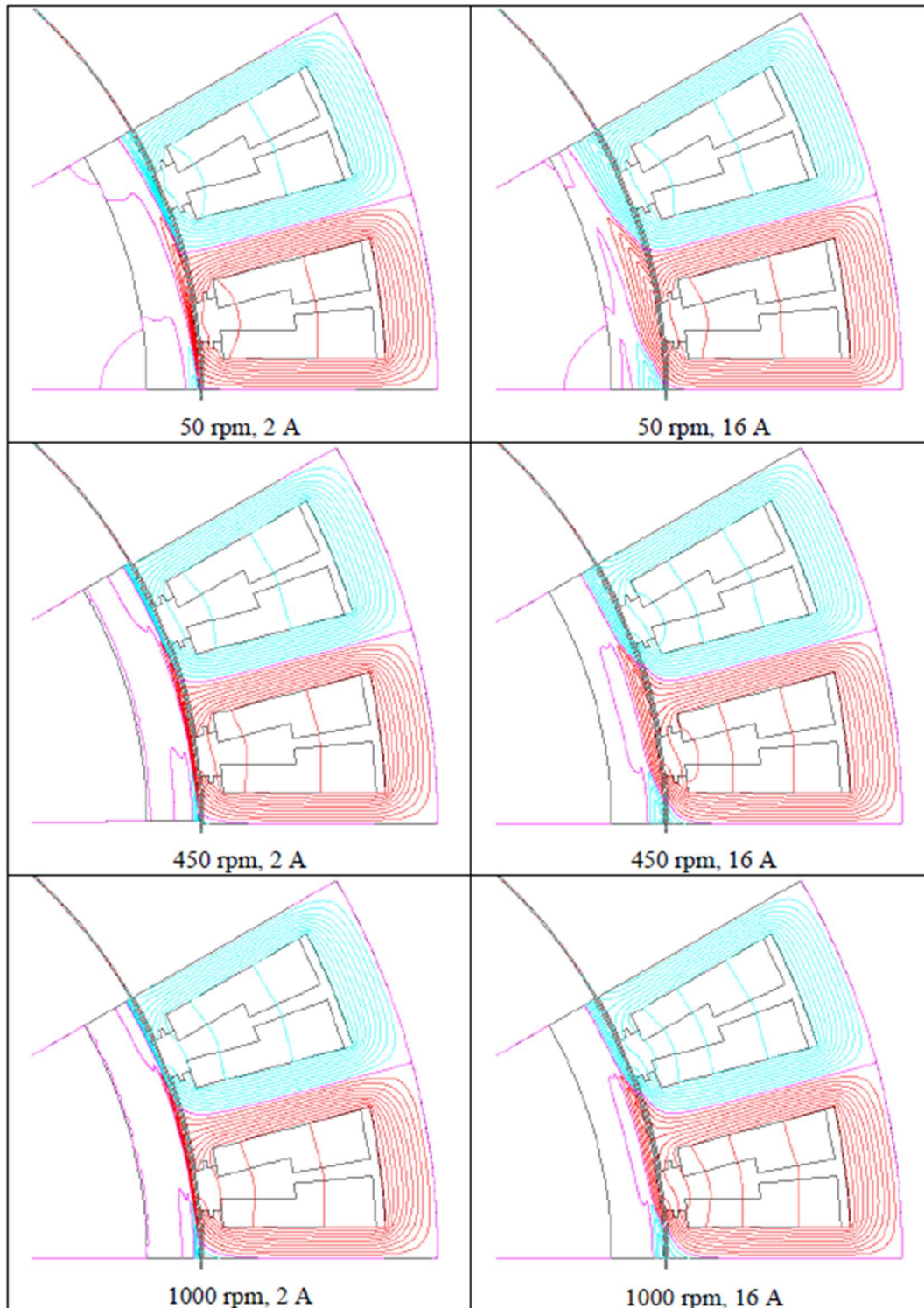
% A função abaixo gera 10 curvas de níveis dos módulos Bestat
contour(60*n,T,Bestat,10);

% FIM - 55
```

ANEXO A

Representação das linhas de campo magnético para comparação da penetração do campo para diferentes rotações e correntes de excitação.

Retirado de [8]



ANEXO B

Distribuição das induções no entreferro em função da rotação para uma corrente de excitação de 16A.

Figura B1 - Induções magnéticas B_{ac} com a variação da rotação. Retirado de [8]

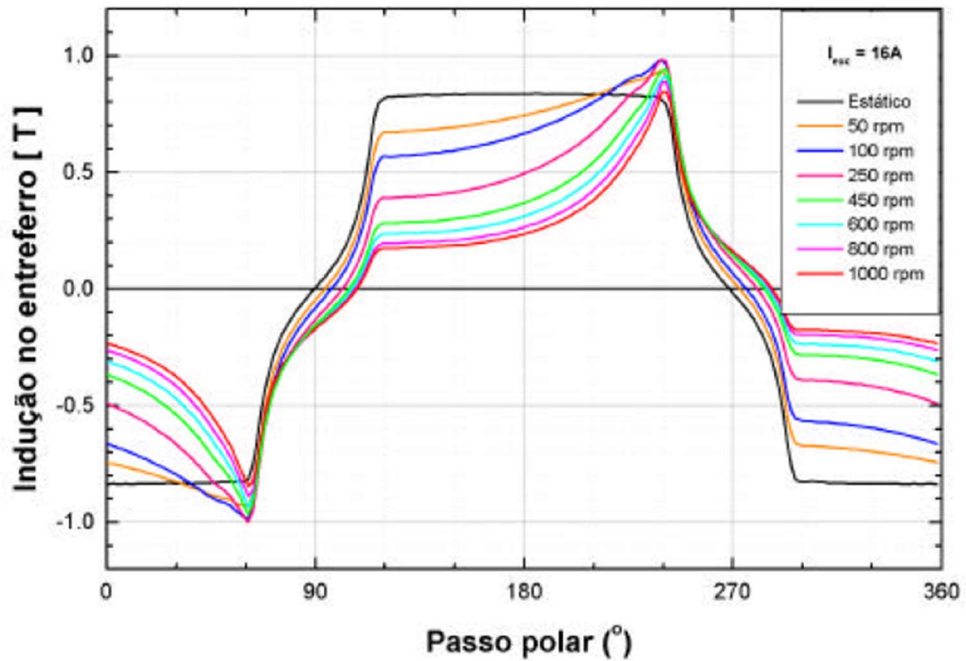


Figura B2 - Induções magnéticas B_r com a variação da rotação. Retirado de [8]

